IV 방정식과 부등식

1 단원의 지도 목표

1. 이차방정식

① 복소수의 범위에서 이차방정식의 근을 구할 수 있게 한다.
② 판별식을 이해하고, 이를 이용하여 이차방정식의 근을 판별할 수 있게 한다.
③ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하게 한다.

2. 여러 가지 방정식

① 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있게 한다.
② 미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀 수 있게 한다.
③ 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다.

3. 부등식

① 부등식의 성질을 이해하고, 절대값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.
② 이차부등식의 뜻을 알고, 이차부등식을 풀 수 있게 한다.
③ 간단한 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.

2 지도 계통

학습한 내용	학습 내용	학습할 내용
7-가 일차방정식의 풀이와 활용 9-가 이차방정식과 그 해	1. 이차방정식 §1. 이차방정식의 풀이 §2. 판별식 §3. 근과 계수의 관계	수학 I 다항함수 이차곡선
8-가 미지수가 2개인 연립일차방정식의 풀이 9-가 이차방정식과 그 해 10-가 인수정리	2. 여러 가지 방정식 §1. 삼차방정식과 사차방정식 §2. 연립방정식	수학 I 지수방정식 로그방정식 수학 II 분수방정식 무리방정식
8-가 부등식과 그 성질 8-가 연립일차부등식의 풀이 10-가 이차방정식의 판별식	3. 부등식 §1. 절대값을 포함한 일차부등식 §2. 이차부등식 §3. 부등식의 증명	수학 I 지수부등식/로그부등식 수학 II 삼차부등식과 사차부등식/분수부등식

③ 지도 계획

중단원	소단원	교과서 쪽수	차시	학습 내용	용어와 기호	선수 학습
	단원을 시작하며	119		· 일차방정식의 풀이 · 이차방정식의 풀이 · 연립일차방정식의 풀이		7-가 9-가 8-가
1. 이차방정식	§1. 이차방정식의 풀이	120～123	① ②	· 실근과 허근의 뜻 · 복소수 범위에서의 이차방정식의 근	실근, 허근	7-가 9-가
	§2. 판별식	124～126	③ ④	· 판별식의 뜻 · 이차방정식의 근의 판별	판별식	9-가
	§3. 근과 계수의 관계	127～131	⑤ ⑥ ⑦	· 근과 계수의 관계 · 두 수를 근으로 하는 이차방정식		9-가
	탐구하는 수학	132	⑧	· 창의력 · 문제 해결력		
	연습 문제	133		· 중단원 확인 학습 문제		
2. 여러 가지 방정식	§1. 삼차방정식과 사차방정식	135～138	⑨ ⑩	· 간단한 삼차방정식의 풀이 · 간단한 사차방정식의 풀이	삼차방정식, 사차방정식	7-가 9-가 10-가
	§2. 연립방정식	139～144	⑪ ⑫ ⑬	· 미지수가 3개인 연립일차방정식 · 미지수가 2개인 연립이차방정식 · 연립방정식의 활용	연립이차방정식	8-가
	탐구하는 수학	145	⑭	· 창의력 · 문제 해결력		
	연습 문제	146～147		· 중단원 확인 학습 문제		
3. 부등식	§1. 절대값을 포함한 일차부등식	148～150	⑮	· 절대값을 포함한 일차부등식의 풀이		7-가
	§2. 이차부등식	151～157	⑯ ⑰ ⑱ ⑲	· 이차부등식의 뜻과 풀이 · 연립이차부등식의 풀이	이차부등식	8-가 10-가
	§3. 부등식의 증명	158～160	⑳ ㉑	· 절대부등식의 뜻 · 간단한 절대부등식의 증명	절대부등식	8-나
	탐구하는 수학	145	㉒	· 오류 분석 · 창의력 · 문제 해결력		
	연습 문제	162～163		· 중단원 확인 학습 문제		
	다시 알아보기	164	㉓	· 대단원의 필수 학습 내용 요약		
	종합 문제	165～166		· 대단원 확인 학습 문제		
	함께 하는 수학	167		· 협력 학습 수행 과제		

4 단원의 이론적 배경

1. 방정식의 역사


카르다노(Cardano, G.)

기원전 6 세기경의 바빌로니아에서는 일차, 이차 및 삼차방정식에 해당하는 문제를 풀고 있었고, 고대 이집트에서 만들어진 가장 오래된 수학서인 '아메스의 파피루스'에도 일차방정식과 이차방정식이 보인다. 뿐만 아니라 알렉산드리아 시대의 디오판토스(Diophantos; 246? ~ 330?)는 이미 이차방정식의 해법을 알고 있었다고 한다.

이항을 이용하여 방정식을 푸는 방법이 정착된 것은 알콰리즈미(Alkhwarizmi; 780 ~ 850)의 시대부터라고 생각되고 있다. 그는 일차, 이차방정식의 풀이법이 포함된 방정식에 관한 책을 발표하여 이항을 al−gebr라고 불렀는데, 이것이 오늘날의 대수 algebra의 어원이 되었다.

바스카라(Bhaskara, A.; 1114 ~ 1185)는 1150년에 이차방정식에 두 근이 있고, 음의 근과 무리근이 존재함을 인식한 최초의 수학자였다. 또, 바스카라는 삼차, 사차방정식도 다루었다. 그러나 인도 수학의 가장 큰 공적은 0과 음수의 발견, 자릿수 기수법에 의한 수의 사용인데, 이것은 현대 수학의 토대가 되었다.

삼차방정식의 해법에 처음으로 성공한 사람은 페로(Ferro; 1465 ? ~ 1565)라고 하며, 사차방정식은 카르다노(Cardano, G.; 1501 ~ 1576)의 제자인 페라리(Ferrari, L.; 1522 ~ 1565)에 의하여 발견되었다. 카르다노는 1545년에 삼차, 사차방정식의 해법을 책으로 발표하였다.

삼차, 사차방정식의 해법이 발견된 후에 약 300년간 많은 수학자들이 5차 이상의 방정식의 근의 공식을 발견하려고 고심하였다. 그러나 아벨(Abel, N. H.; 1802 ~ 1829)은 1826년에 '5차 이상의 방정식은 일반적으로 대수적으로 풀 수 없다.' 라는 정리를 증명하였다. 그 후, 갈루아(Galois, E.; 1811 ~ 1832)에 의해서 대수방정식이 대수적으로 풀 수 있는지 어떤지는 근에 대한 치환군(아벨군)의 군론적 구조에 따라 명백해진다는 것이 밝혀졌다. 이와 같은 독창적인 갈로아의 생각은 오늘날의 갈로아 이론의 바탕이 되었고, 현대 수학에 막대한 영향을 주었다. 5차 이상의 대수방정식이라도 특별한 것은 물론 대수적으로 풀 수 있다. 또, 타원함수와 같은 알맞은 함수를 활용하면 5차방정식의 근의 공식을 만들 수도 있다.

2. 방정식의 근

(1) 대수학의 기본 정리

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 근은 복소수 범위에서 근의 공식에 의하여

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

의 2개의 근을 가지게 된다. 따라서, 임의의 이차식은 복소수 범위에서 2개의 일차식의 곱으로 인수분해됨을 알 수 있다.

한편, 실수 계수를 가지는 임의의 n차 방정식은 복소수 범위에서는 중복을 허락하여

꼭 n개의 근을 가짐이 증명되었는데, 이것을 '대수학의 기본 정리'라고 부른다. 이에 따르면 $(x-a)^2=(x-a)(x-a)$와 같이 일차식으로 나누어 쓸 때, 임의의 n차식은 복소수의 범위에서 n개의 일차식의 곱으로 인수분해할 수 있음을 알 수 있다.

계수가 모두 실수인 방정식이 한 허근 $\alpha+\beta i$를 가지면 켤레복소수인 $\alpha-\beta i$도 그 방정식의 근이 됨이 알려져 있다. 따라서, 한 허근을 가지는 방정식은

$$\{x-(\alpha+\beta i)\}\times\{x-(\alpha-\beta i)\}=x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)$$

을 인수로 가지게 된다.

이 때, -2α, $\alpha^2+\beta^2$은 모두 실수이므로 임의의 n차 다항식은 실수 범위에서는 $(x-a)$ 형태의 일차식과 $\{x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)\}$형태의 이차식의 곱으로 인수분해할 수 있음을 알 수 있다.

(2) 삼차방정식의 근(Cardano의 해법)

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0)$에 $x=y-\dfrac{b}{3a}$를 대입하여 계산하면 $ay^3+\left(c-\dfrac{b^2}{3a}\right)y+d-\dfrac{bc}{3a}+\dfrac{2b^3}{27a^2}=0$ 이 된다. 이 등식의 양변을 a로 나누어

$$3p=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{3a^2},\ -2q=\frac{d}{a}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{2b^3}{27a^3}$$

으로 놓으면

$$y^3+3py-2q=0 \qquad ①$$

인 삼차방정식이 된다. 이것을 풀기 위해 $y=A+B$로 놓으면

$$y^3=A^3+B^3+3AB(A+B)=A^3+B^3+3ABy$$

$$y^3-3ABy-(A^3+B^3)=0$$

이 식을 ①과 비교하면

$$\begin{cases}A^3+B^3=2q\\AB=-p\end{cases}$$

가 된다. 이 식에서 A^3과 B^3을 구하기 위하여 이 두 값을 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면 $t^2-2qt-p^3=0$ 이다. 따라서,

$$t=q\pm\sqrt{q^2+p^3}$$

$$\therefore A=\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}},\ B=\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}}$$

으로 놓을 수 있다. 그러므로

$$y=A+B=\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}}$$

은 방정식의 한 근이 된다. 또, $A+B$가 ①의 한 근이면

$$\omega A+\omega^2B,\ \omega^2A+\omega B$$

도 ①의 근이 된다. 여기서, ω는 $\omega^2+\omega+1=0$을 만족하는 값이다.

따라서, 방정식 ①의 근은

$$x=\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}},$$
$$x=\omega\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}+\omega\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}},$$
$$x=\omega^2\cdot\sqrt[3]{q+\sqrt{p^3+q^2}}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{q-\sqrt{p^3+q^2}}$$

이다.

(3) 4차방정식의 해법(Ferrari의 해법)

사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$에 $x=y-\frac{a}{4}$를 대입하여 정리하면 삼차항이 없어져서

$$y^4+py^2+qy+r=0$$

의 형태가 된다. 이 때, $y^4=-py^2-qy-r$의 양변에 $2y^2t+t^2$을 더하여 정리하면

$$(y^2+t)^2=(2t-p)y^2-qy+t^2-r \qquad ②$$

이 된다. 이제, 우변의 식이 완전제곱식이 되도록 하려면

$$D=q^2-4(2t-p)(t^2-r)=0$$

이 되어야 한다. 즉, 위의 t에 대한 3차방정식의 근을 택하여 ②에 대입하면 된다. 따라서, 이 3차방정식을 만족하는 t에 대하여 ②의 식은

$$(y^2+t)^2=(my+n)^2$$

이 되고, 따라서

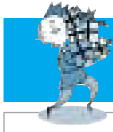
$$y^2-my-n+t=0,\ y^2+my+n+t=0$$

의 두 이차방정식으로 변환된다. 따라서, y의 값은 이 두 이차방정식의 해 4개가 되며, 이 값을 $x=y-\frac{a}{4}$에 대입하면 주어진 4차방정식의 해 4개를 얻을 수 있다.

참고 문헌



1. Eves(허민 오혜영역)(1995), '수학의 위대한 순간들', 경문사
2. 김응태 박승안(1997), '현대 대수학', 경문사
3. 박윤범 외(2000), '중학교 수학 7-가 교사용 지도서', 대한교과서
4. 조태근 외(1989), '고등 학교 일반 수학 지도서', 금성출판사
5. http://www.math119.com



단원을 시작하며

118·119 교과서

470년경, 고구려와 백제에서 불교를 공인한 후 150년 뒤인 527년에 신라는 이차돈의 순교로 불교를 공인하게 되었다.

한국 문화 체험에 참가한 외국인 수행자들

1247년, 중국 송나라의 태구소(泰九韶)가 부정방정식과 고차방정식의 해법을 설명한 '수서구장(數書九章)'을 엮었다.

지수귀문도

조선 시대 최석정(崔錫鼎; 1646～1715)이 '구수략(九數略)'이라는 수학책에서 여러 가지 마방진을 보여 주었다.

미국의 남북 전쟁 발발
노예 제도를 고수하려는 남부와 노예제 폐지를 주장한 북부 사이에 일어난 전쟁

AD476 · AD1501 · AD1560 · AD1695 · AD1802 · AD1859

아리아바타(Aryabhata; 476～550?)
이차방정식의 해법을 생각해 내었다.

카르다노(Cardano, G.; 1501～1576)
타르탈리아로부터 힌트를 얻은 3차방정식의 해법과 4차방정식의 해법을 실은 대수학 책을 발간하였다.

해리엇(Harriot, T.; 1560～1621)
부등호의 기호(현재 사용하는 〈, 〉과는 다른 모양임)를 처음 도입하였다.

아벨(Abel, N. H.; 1802～1829)
5차 이상의 방정식은 근의 공식이 존재하지 않음을 증명하였다.

'방정식을 통하여 자연 현상을 설명해야만 한다.'는 말이 있을 정도로 방정식은 자연 현상과 과학, 수학을 연결시켜 주는 고리 역할을 하고 있다.
실제로 문제를 푸는 데 미지수를 사용하는 효과적인 방법을 도입한 사람은 디오판토스(Diophantos; 246?～330?)이다. 당시에는 방정식의 해를 정수나 유리수로 한정시켜 생각했기 때문에 방정식 중에서 정수해를 구하는 것을 디오판토스의 방정식이라 부른다.
정수해를 구하는 것은 일반적인 해를 구하는 것보다 간단해 보일지 모르지만 정수해를 구하는 대표적인 문제인 '페르마 정리'는 350년 만에 겨우 해결되었다.

이집트 숫자

1 다음 일차방정식을 풀어라.
(1) $5x+1=16$　　(2) $3(x+1)=4x-5$

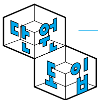
2 다음 이차방정식을 풀어라.
(1) $2x^2-7x+6=0$　　(2) $x^2+4x-10=0$

3 다음 연립일차방정식을 풀어라.
$\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x-y=7 \end{cases}$

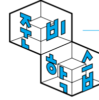
일차방정식의 풀이 (7-가)
이항을 이용하여 미지수를 한 쪽으로 옮긴 후, 'x=(수)'의 형태로 고친다.

이차방정식의 풀이 (9-가)
인수분해를 이용하거나 근의 공식을 이용한다.

연립일차방정식의 풀이 (8-가)
대입법, 소거법, 가감법 등을 이용하여 미지수 하나를 소거하여 푼다.



동양에서 가장 오래된 수학책인 구장산술(九章算術)은 중국 수학의 기본을 이루며, 당나라 시대에는 산학이라는 학교를 만들어서 구장산술을 3년간 배우도록 하였다.
이 책은 총 9장 246문제로 이루어져 있는데, 그 중에서 8장 방정(方程)은 방정식이라는 말의 어원이 되었다. 구장산술에는 전답의 넓이와 길이, 곡물 교역 문제, 급료나 조세 문제, 넓이와 부피 문제, 토목 공사 문제 등과 관련된 내용 등이 실려 있다.
이와 같이 예로부터 방정식은 실생활과 밀접한 관계를 가지고 있었으며, 현대에는 보다 복잡하고 다양한 방정식이 연구되고 활용되고 있다.



1 (1) $5x+1=16$

$5x=15 \quad \therefore x=3$

(2) $3(x+1)=4x-5$

$3x+3=4x-5 \quad \therefore x=8$

2 (1) $2x^2-7x+6=0$

$(2x-3)(x-2)=0$

$\therefore x=\dfrac{3}{2}$ 또는 2

(2) $x^2+4x-10=0$

$\therefore x=-2\pm\sqrt{4+10}=-2\pm\sqrt{14}$

3 $\begin{cases} x+2y=6 & \cdots ① \\ 2x-y=7 & \cdots ② \end{cases}$

②의 $y=2x-7$을 ①에 대입하여 풀면

$5x=20 \quad \therefore x=4$

$x=4$를 ②에 대입하여 풀면 $y=1$

§1. 이차방정식의 풀이 ▶ 1~2차시

지도 목표

1. 복소수 범위에서 이차방정식은 항상 근을 가짐을 이해하게 한다.
2. 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 말할 수 있게 한다.
3. 인수분해나 완전제곱식, 근의 공식 등을 이용하여 복소수 범위에서 이차방정식의 근을 구할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 중학교에서는 이차방정식의 근을 실수 범위에서 구하였으나 여기서는 복소수 범위까지 확장하여 구하고 있음을 주지시킨다. 그러나 계수는 실수인 것만을 다룬다.
2. 인수분해를 이용하여 이차방정식을 풀 때 사용되는 실수의 성질은

   $$AB=0 \iff A=0 \text{ 또는 } B=0$$

   임을 이해시킨다.
3. 완전제곱식으로 풀어서 근을 구하는 것을 정리한 것이 근의 공식임을 이해시킨다.
4. 중학교에서 근의 공식을 사용할 때에는 근호 안의 값이 음수가 아니라는 조건이 필요하였지만 복소수 범위까지 확장하여 근을 구할 때에는 이 조건이 필요 없음을 주지시킨다.

본문 해설

1 생각해 봅시다 ⇨ 이차방정식의 근

파르테논 신전의 건축에 쓰여진 황금비를 실제로 구하는 과정에서 이차방정식의 근을 유리수 범위에서 구할 수 없을 때에도 실수 범위에서는 구할 수 있음을 이해하고, 이를 바탕으로 실수 범위에서 근을 구할 수 없는 경우에도 복소수 범위까지 확장하면 근을 구할 수 있음을 지도한다.

물음1 □DEFC와 □ABCD가 닮았으므로

$1:x=x-1:1,\ x^2-x-1=0$

$\therefore x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

1 이차방정식

교과서 120쪽

§1. 이차방정식의 풀이

■ 이차방정식의 실근과 허근의 뜻을 말할 수 있다.
■ 복소수의 범위에서 이차방정식의 근을 구할 수 있다.

이차방정식의 근

1 생각해 봅시다

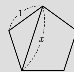
고대 그리스에 세워진 파르테논 신전의 폭과 높이를 가로와 세로의 길이로 하는 직사각형을 만들었을 때, 그 직사각형 ABCD에서 세로의 길이를 한 변으로 하는 정사각형 ABFE를 잘라 내고 남은 직사각형 DEFC는 원래의 직사각형 ABCD와 닮은 모양이 된다고 한다. 이 때, 다음 물음에 답하여라.

물음 1 세로의 길이를 1, 가로의 길이를 x라 할 때, x에 관한 방정식을 세우고, 그 해를 구하여라.

물음 2 고대 그리스 인들은 유리수로 모든 것을 표현할 수 있다고 믿었다. 그들은 위의 방정식을 만족하는 x를 유리수 범위 내에서 구할 수 있었겠는가?

물음 3 방정식 $x^2+5=0$의 근을 실수 범위 내에서 구할 수 있는가? 근을 구할 수 없다면 복소수의 범위 내에서는 구할 수 있는가?

황금비
파르테논 신전의 가로와 세로의 길이의 비, 정오각형의 대각선과 한 변의 길이의 비와 같은 값을 황금비(Golden Ratio)라 한다.



물음2 구할 수 없었다.

물음3 구할 수 없다, 구할 수 있다.

2 실수 계수를 가지는 이차방정식의 근이 실수인 경우를 실근, 허수인 경우를 허근이라 함을 지도한다.

뿌리 문제 1 ⇨ 실근과 허근을 구별하기

(1) $x^2-2x-8=0,\ (x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2,\ 4$ (실근)

(2) $x^2+5=0,\ x^2=-5$

$\therefore x=\pm\sqrt{5}\,i$ (허근)

(3) $2x^2-7x+5=0,\ (x-1)(2x-5)=0$

$\therefore x=1,\ \dfrac{5}{2}$ (실근)

(4) $x^2-x+6=0,\ x^2-x+\dfrac{1}{4}=-6+\dfrac{1}{4}$

2

이차방정식 $x^2+1=0$은 실수 범위에서는 근을 가지지 못하지만, 복소수 범위에서는 $x=i$ 또는 $x=-i$라는 근을 가진다.

지금까지는 이차방정식의 근이 실수인 경우만을 다루었으나, 이제부터는 이차방정식의 근을 복소수의 범위까지 확장하여 생각하기로 한다. 단, 여기서 이차방정식은 실수 계수를 가지는 경우만을 다루기로 한다.

실수 계수를 가지는 이차방정식

$$ax^2+bx+c=0\ (a,\ b,\ c\in R,\ a\neq0)$$

의 근이 실수인 경우를 **실근**, 허수인 경우를 **허근**이라 한다.

제곱근의 정의나 인수분해 또는 완전제곱식을 이용하면 이차방정식의 근을 복소수의 범위에서 구할 수 있다.

예제 1 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2-4x+3=0$ (2) $x^2+3=0$

(3) $x^2+6x+11=0$

| 풀이 | (1) 좌변을 인수분해하면

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)=0$$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

(2) 상수항을 이항하면 $x^2=-3$이 된다.

$\therefore\ x=\pm\sqrt{3}\,i$

(3) 상수항을 이항하면

$$x^2+6x=-11$$

양변에 9를 더하여 완전제곱식으로 고치면

$$x^2+6x+9=-11+9$$

$$(x+3)^2=-2$$

$$x+3=\pm\sqrt{2}\,i$$

$\therefore\ x=-3\pm\sqrt{2}\,i$

답 $x=1$ 또는 $x=3$ (2) $x=\pm\sqrt{3}\,i$ (3) $x=-3\pm\sqrt{2}i$

이차방정식을 풀 때, 인수분해가 쉽게 되지 않으면 다음과 같이 완전제곱식으로 변형시켜 풀 수도 있다.

$x^2\pm2Ax=B$

$x^2\pm2Ax+A^2=B+A^2$

$(x\pm A)^2=B+A^2$

| 참고 | 일반적으로 실수 계수의 모든 이차방정식은 해의 범위를 복소수 범위까지 확장하면 항상 2개의 근을 가진다.

뿌리 **문제 1** 다음 이차방정식을 풀고, 허근을 가지는 이차방정식을 모두 말하여라.

(1) $x^2-2x-8=0$ (2) $x^2+5=0$

(3) $2x^2-7x+5=0$ (4) $x^2-x+6=0$

근의 공식을 이용한 풀이

3

실수 계수를 가지는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$은 복소수 범위 내에서 언제나 완전제곱식으로 변형하여 풀 수 있다. 그러나 이차방정식을 풀 때마다 완전제곱식으로 변형하는 것은 번거로우므로 다음과 같은 근의 공식을 이용하면 편리하다.

이차방정식의 근의 공식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 근은 다음과 같다.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

| 참고 | 9-가 단계에서는 $b^2-4ac\geq0$인 경우만 다루었지만, 복소수 범위에서는 이 조건이 필요 없다.

예제 2 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+3x-5=0$ (2) $3x^2-2x+5=0$

| 풀이 | (1) $a=1,\ b=3,\ c=-5$이므로 근의 공식에서

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-5)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$$

(2) $a=3,\ b=-2,\ c=5$이므로 근의 공식에서

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot3\cdot5}}{2\cdot3}$$

$$=\frac{2\pm2\sqrt{14}\,i}{6}=\frac{1\pm\sqrt{14}\,i}{3}$$

답 (1) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$ (2) $x=\dfrac{1\pm\sqrt{14}\,i}{3}$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{23}{4}\quad\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{23}\,i}{2}\ (\text{허근})$$

따라서, 허근을 가지는 이차방정식은 (2), (4)이다.

3 실수 계수를 가지는 이차방정식은 완전제곱식으로 변형되므로 복소수 범위까지 확장하면 근을 구할 수 있다.

중학교에서 배운 근의 공식을 상기시키고, 근호 속이 음수가 되는 경우에는 허근이 나옴을 이해하도록 지도한다.

뿌리 **문제 2** 근의 공식 이용하기

(1) $x^2+3x-4=0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2}$$

$\therefore\ x=1,\ -4$

(2) $2x^2-2x-3=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{7}}{2}$$

줄기 **문제 3** 근의 공식의 변형 증명하기

이차방정식의 근의 공식을 이용하면

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b'^2-ac)}}{2a}$$

$$=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

줄기 **문제 4** 변형된 근의 공식 이용하기

(1) $4x^2-8x+1=0$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}$$

풀이 문제 2 근의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $x^2+3x-4=0$　　　(2) $2x^2-2x-3=0$

줄기 문제 3 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0(a\neq0)$의 근은 다음과 같음을 밝혀라.

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

줄기 문제 4 문제 3 의 공식을 이용하여 다음 이차방정식을 풀어라.

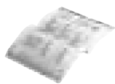
(1) $4x^2-8x+1=0$　　　(2) $5x^2+6x+5=0$

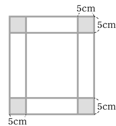
줄기 문제 5 다음 이차방정식을 풀어라.

(1) $2x^2-x-1=0$　　　(2) $x^2-4x+1=0$

(3) $3x^2+2x-3=0$　　　(4) $2x^2-x+5=0$

열매 문제 6 수영이는 컴퓨터 관련 책 한 권을 사서 친구에게 보내려고 한다. 이 책을 포장하기 위해 오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 두꺼운 종이로 뚜껑 없는 직육면체 모양의 상자를 먼저 만들었다.
이 책을 넣을 수 있는 상자의 부피가 2700cm^3이고, 이 상자의 세로의 길이는 가로의 길이보다 7cm 길고, 높이가 5cm였다. 이 상자를 만들 때에 사용한 두꺼운 종이의 두 변의 길이를 구하여라.





(2) $5x^2+6x+5=0$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-5\cdot5}}{5}=\frac{-3\pm4i}{5}$$

줄기 문제 5　　근의 공식 이용하기

(1) $2x^2-x-1=0$ 의 좌변을 인수분해하면

$$(x-1)(2x+1)=0 \qquad \therefore\ x=1,\ -\frac{1}{2}$$

(2) $x^2-4x+1=0$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot1}}{1}$$

$$=2\pm\sqrt{3}$$

(3) $3x^2+2x-3=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-3\cdot(-3)}}{3}=\frac{-1\pm\sqrt{10}}{3}$$

(4) $2x^2-x+5=0$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot2\cdot5}}{2\cdot2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{39}\,i}{4}$$

열매 문제 6　　이차방정식의 활용

상자의 가로의 길이를 x 라 하면

$$5x(x+7)=2700$$

$$x^2+7x-540=0,\ (x-20)(x+27)=0$$

$$\therefore\ x=20,\ -27$$

$x>0$이어야 하므로 $x=20$(cm)이다. 따라서, 종이의 두 변의 길이는 30cm, 37cm이다.



형성 평가

기본 이차방정식 $x^2-3x+5=0$을 풀어라.　　답 : $x=\dfrac{3\pm\sqrt{11}i}{2}$

보충 이차방정식 $x^2-6x+8=0$을 풀어라.　　답 : $x=2,\ 4$

심화 이차방정식 $-4x^2+4x-3=0$을 풀어라.　　답 : $x=\dfrac{1\pm\sqrt{2}i}{2}$

§2. 판별식

▶ 3~4 차시

지도 목표

1. 실수 계수의 이차방정식의 판별식의 뜻을 이해하게 한다.
2. 이차방정식의 판별식을 이용하여 실근과 중근, 허근을 판별할 수 있게 한다.
3. 미정계수가 있는 이차방정식의 근의 종류에 따라 그 미정계수가 만족해야 하는 조건을 구할 수 있도록 지도한다.

지도상의 유의점

1. 이차방정식의 근의 공식에서 근호 안의 값 b^2-4ac가 양수이면 서로 다른 두 실근, 0이면 중근, 음수이면 허근이 됨을 이해하게 한다.
2. 역으로, 이차방정식의 근의 공식에서 두 근의 조건으로 근호 안의 값의 부호를 판별할 수 있음을 이해하도록 지도한다.
3. 미정계수가 있는 이차방정식에서 판별식을 이용하여 그 미정계수가 만족해야 하는 조건을 찾아낼 수 있도록 지도한다.

본문 해설


생각해 봅시다 ⟡ 판별식의 의미 유도하기

근의 공식을 이용하여 이차방정식의 근을 구하여 그 종류를 판별한 후, 근의 공식의 근호 안의 값의 부호와 어떠한 관계를 가지는지 살펴서 판별식의 의미를 깨닫도록 지도한다.

물음1 (1), (6), 모두 양수이다.

물음2 (2), (4), 모두 음수이다.

물음3 (3), (5), 모두 0이다.


이차방정식의 근의 공식에서 근호 안의 식 b^2-4ac 의 부호에 따라서 이차방정식의 근의 종류를 판별할 수 있음을 이해시키고, 이런 의미에서 b^2-4ac 를 이 이차방정식의 판별식이라 함을 지도한다.

---

§2. 판별식

■ 판별식을 이해하고, 이를 이용하여 이차방정식의 근을 판별할 수 있다.

판별식의 뜻과 활용

1 생각해 봅시다

이차방정식의 근의 공식을 이용하여 다음 방정식의 근을 구하고, 물음에 답하여라.

(1) $x^2+3x-10=0$	(2) $x^2+2x+4=0$
(3) $x^2-6x+9=0$	(4) $3x^2-x+2=0$
(5) $2x^2-4x+2=0$	(6) $x^2-3x+1=0$

물음 1 위의 이차방정식 중에서 서로 다른 두 실근을 가지는 것을 모두 골라라. 이 이차방정식에 근의 공식을 적용하였을 때, 근호 안의 값은 어떤 공통점이 있는가?

물음 2 위의 이차방정식 중에서 서로 다른 두 허근을 가지는 것을 모두 골라라. 이 이차방정식에 근의 공식을 적용하였을 때, 근호 안의 값은 어떤 공통점이 있는가?

물음 3 위의 이차방정식 중에서 중근을 가지는 것을 모두 골라라. 이 이차방정식에 근의 공식을 적용하였을 때, 근호 안의 값은 어떤 공통점이 있는가?

124 Ⅳ. 방정식과 부등식

뿌리 문제 1 ⟡ 이차방정식의 근 판별하기

(1) $D=3^2-4\cdot1\cdot(-2)=17>0$

$\therefore$ 서로 다른 두 실근

(2) $D=(-2)^2-4\cdot4\cdot1=-12<0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근

(3) $D=(-10)^2-4\cdot1\cdot25=0$ $\therefore$ 중근

(4) $D=(-2)^2-4\cdot2\cdot(-3)=28>0$

$\therefore$ 서로 다른 두 실근

줄기 문제 2 ⟡ 이차방정식의 미지 계수 구하기

$D=(3-k)^2-4\cdot1\cdot(-2)(k-1)$

$=k^2+2k+1=(k+1)^2=0$ $\therefore k=-1$

따라서, 주어진 이차방정식은

$x^2+4x+4=(x+2)^2=0$

$\therefore x=-2$(중근)

2

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 근은 근의 공식을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이 때, 이 근은 근호 안의 식 b^2-4ac의 부호에 따라서

❶ $b^2-4ac>0$일 때, 서로 다른 두 실근

❷ $b^2-4ac=0$일 때, 중근(서로 같은 두 실근)

❸ $b^2-4ac<0$일 때, 서로 다른 두 허근

이 된다. 또, 이 사실의 역도 성립한다.

판별식을 나타내는 기호 D는 Discriminant의 첫 글자를 쓴 것이다.

이와 같이, 이차방정식의 근을 식 b^2-4ac의 값의 부호에 따라 판별할 수 있으므로 식 b^2-4ac를 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 **판별식**이라 하고, 이를 D로 나타낸다. 즉,

$$D=b^2-4ac$$

이다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

이차방정식의 근의 판별

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$은

❶ $D=b^2-4ac>0$ ⟺ 서로 다른 두 실근을 가진다.

❷ $D=b^2-4ac=0$ ⟺ 중근을 가진다.

(❶, ❷: 실근)

❸ $D=b^2-4ac<0$ ⟺ 서로 다른 두 허근을 가진다. (허근)

| 참고 | 서로 다른 두 허근은 서로 켤레복소수가 된다.



(1) 이차방정식 $x^2+x-7=0$에서

$$D=1^2-4\cdot1\cdot(-7)=29>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.

(2) 이차방정식 $2x^2-3x+3=0$에서

$$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot3=-15<0$$

이므로 서로 다른 두 허근을 가진다.

(3) 이차방정식 $4x^2-4x+1=0$에서

$$D=(-4)^2-4\cdot4\cdot1=0$$

이므로 중근을 가진다.

뿌리 문제 1 다음 이차방정식의 근을 판별하여라.

(1) $x^2+3x-2=0$　　(2) $4x^2-2x+1=0$

(3) $x^2-10x+25=0$　　(4) $2x^2-2x-3=0$

3 예제 1

이차방정식 $x^2-3x+k=0$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 실근을 가지도록 k의 값의 범위를 정하여라.

(2) 중근을 가지도록 k의 값을 정하여라.

| 풀이 | 판별식을 D라 하면 $D=(-3)^2-4\cdot1\cdot k=9-4k$에서

(1) 실근에는 서로 다른 두 실근과 중근의 2가지 경우가 있으므로

$$D=9-4k\geq0 \quad \therefore\ k\leq\frac{9}{4}$$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$$9-4k=0 \quad \therefore\ k=\frac{9}{4}$$

답 (1) $k\leq\frac{9}{4}$　(2) $k=\frac{9}{4}$

줄기 문제 2 이차방정식 $x^2+(3-k)x-2(k-1)=0$이 중근을 가지도록 실수 k의 값을 정하여라. 또, 이 때의 중근을 구하여라.

줄기 문제 3 일차항의 계수가 짝수인 이차방정식 $ax^2+2b'x+c=0(a\neq0)$의 근은

$$\frac{D}{4}=b'^2-ac$$

의 부호로 판별할 수 있음을 설명하여라.

줄기 문제 4 이차방정식 $x^2+2(a-1)x+(a^2-10a-3)=0$이 다음과 같은 근을 가질 때, 실수 a의 값 또는 a의 값의 범위를 구하여라.

(1) 서로 다른 두 실근　　(2) 중근

(3) 서로 다른 두 허근

줄기 문제 3

판별식의 변형

$D=(2b')^2-4ac=4(b'^2-ac)$이므로 D의 부호는 $\frac{D}{4}=b'^2-ac$의 부호와 같게 되어 이것으로도 근을 판별할 수 있다.

줄기 문제 4

이차방정식의 미지 계수 구하기

$D=\{2(a-1)\}^2-4(a^2-10a-3)$
$=32a+16$

(1) $a>-\frac{1}{2}$　(2) $a=-\frac{1}{2}$　(3) $a<-\frac{1}{2}$

형성 평가

기본 1 이차방정식 $x^2-kx-(1-k)=0$이 중근을 가지도록 k의 값을 정하여라.

답 : 2

보충 2 이차방정식 $x^2-6x+8=0$의 근을 판별하여라.

답 : 서로 다른 두 실근

심화 3 $x^2-2(k+1)x-(2k-7)=0$이 실근을 가지도록 k의 범위를 구하여라.

답 : $k\geq-2+\sqrt{10}$ 또는 $k\leq-2-\sqrt{10}$

§3. 근과 계수의 관계

▶ 5~6 차시

지도 목표

1. 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해하게 한다.
2. 주어진 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 구할 수 있게 한다.
3. 이차식을 복소수 범위에서 인수분해할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 두 근의 합과 곱을 계산하여 근과 계수의 관계를 살펴본다.
2. 주어진 두 수를 근으로 하는 일반적인 이차방정식은 x^2의 계수를 a로 놓도록 지도한다.
3. 이차식의 인수분해를 유리수 범위에서 뿐만 아니라 필요하다면 근의 공식을 이용하여 복소수 범위에서도 할 수 있음을 지도한다.

§3. 근과 계수의 관계

- 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이해한다.
- 두 수를 근으로 하는 이차방정식을 구할 수 있다.

이차방정식의 근과 계수의 관계

1 생각해 봅시다

다음 방정식의 근을 구하고, 물음에 답하여라.

(1) $x^2+3x-10=0$　　(2) $3x^2+2x-4=0$

물음 1 위에서 구한 이차방정식의 두 근의 합은 각각 얼마인가? 또, 각각의 값을 원래의 이차방정식의 계수와 비교해 보아라. 어떤 관계가 있는가?

물음 2 위에서 구한 이차방정식의 두 근의 곱은 각각 얼마인가? 또, 이 각각의 값을 원래의 이차방정식의 계수와 비교해 보아라. 어떤 관계가 있는가?

2 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 근

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

에서 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

라 놓을 수 있다.

1. 이차방정식 127

본문 해설

1 생각해 봅시다　　근과 계수의 관계 유도

이차방정식의 근을 구하여 그 근의 합과 곱을 구한 후, 이차방정식의 계수와의 관계를 알아낼 수 있도록 지도한다.

물음1　-3과 $-\dfrac{2}{3}$

두 근의 합은 $-\dfrac{(x\text{의 계수})}{(x^2\text{의 계수})}$인 관계가 있다.

물음2　-10과 $-\dfrac{4}{3}$

두 근의 곱은 $\dfrac{(\text{상수항})}{(x^2\text{의 계수})}$인 관계가 있다.

2 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 두 근을 구한 후, 두 근의 합과 곱을 실제로 계산해서 근과 계수의 관계를 유도한다.

뿌리 문제 1　　근과 계수의 관계

(1) 합 : -3, 곱 : -2

(2) 합 : 0,　곱 : $\dfrac{1}{4}$

(3) 합 : 2,　곱 : $\dfrac{1}{6}$

(4) 합 : $\dfrac{2}{5}$,　곱 : $\dfrac{3}{5}$

줄기 문제 2　　근과 계수의 관계 활용

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=3$이므로

(1) $(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$
$=3+2\times(-4)+4$
$=-1$

(2) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=(-4)^2-4\times3=4$

이 때,

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$
$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

이다. 따라서, 이차방정식의 두 근의 합과 곱은 이차방정식의 계수로 나타낼 수 있다.

이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$



(1) 이차방정식 $x^2+2x-7=0$에서 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{2}{1}=-2,\ \alpha\beta=\frac{-7}{1}=-7$$

이므로, 두 근의 합은 -2이고, 두 근의 곱은 -7이다.

(2) 이차방정식 $2x^2-2x+3=0$에서 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{-2}{2}=1,\ \alpha\beta=\frac{3}{2}$$

이므로, 두 근의 합은 1이고, 두 근의 곱은 $\frac{3}{2}$이다.

뿌리 문제 1 다음 이차방정식의 두 근의 합과 곱을 구하여라.

(1) $x^2+3x-2=0$ (2) $4x^2+1=0$

(3) $6x^2-12x+1=0$ (4) $5x^2-2x+3=0$

예제 1 이차방정식 $x^2-3x-7=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

| 풀이 | 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3,\qquad \alpha\beta=-7$$

이므로

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=3^2-2\cdot(-7)=23$

(2) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{3}{-7}=-\frac{3}{7}$

답 (1) 23 (2) $-\frac{3}{7}$

줄기 문제 2 이차방정식 $x^2+4x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $(\alpha+2)(\beta+2)$ (2) $(\alpha-\beta)^2$

(3) $\alpha^3+\beta^3$ (4) $\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}$

(2) $(\alpha-\beta)^2$
$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

두 수를 근으로 하는 이차방정식

3

두 수 α, β를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

이므로 좌변을 전개하여 정리하면

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

이 된다. 따라서, 다음 사실을 알 수 있다.

두 수를 근으로 하는 이차방정식

두 수 α, β를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

| 참고 | 두 수 α, β를 근으로 하는 일반적인 이차방정식은 $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-4)^3-3\times3\times(-4)$
$=-28$

(4) $\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}=\frac{(\beta-1)+(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$
$=\frac{(\alpha+\beta)-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$
$=-\frac{3}{4}$

3 주어진 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$을 전개하여 이차방정식 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$을 유도하도록 한다.

뿌리 문제 3 두 수를 근으로 하는 이차방정식

(1) 두 근의 합 : $(2-\sqrt{7})+(2+\sqrt{7})=4$

두 근의 곱 : $(2-\sqrt{7})(2+\sqrt{7})=-3$

따라서, 구하는 방정식은 $x^2-4x-3=0$

(2) 구하는 방정식은

$x^2-(7+5i+7-5i)x+(7+5i)(7-5i)$
$=x^2-14x+74=0$

열매 문제 4 두 수를 근으로 하는 이차방정식의 활용

두 변의 길이를 각각 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=10,\ \alpha\beta=30$$

이다. 따라서, α, β는 $x^2-10x+30=0$의 두 근이 되어야 한다. 그런데 $D<0$이 되어 α, β는 허수가 되므로 꽃밭의 한 변의 길이가 될 수 없다. 따라서, 만들 수 없다.

4 근과 계수의 관계를 이용하여 주어진 이차방정식을 복소수 범위에서 언제나 인수분해할 수 있음을 이해하도록 지도한다.

예제 2 두 수 $3+2i$, $3-2i$를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

| 풀이 | 두 근의 합은

$$(3+2i)+(3-2i)=6$$

두 근의 곱은

$$(3+2i)(3-2i)=9+4=13$$

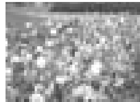
이다. 따라서, 구하는 이차방정식은 $x^2-6x+13=0$이다.

답 $x^2-6x+13=0$

뿌리 **문제 3** 다음 두 수를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

(1) $2-\sqrt{7}$, $2+\sqrt{7}$ (2) $7+5i$, $7-5i$

열매 **문제 4** 길이가 20m인 끈으로 넓이가 30m²인 직사각형 모양의 꽃밭의 둘레에 울타리를 만들 수 있겠는가?



4

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ 이다. 따라서, 이차식 ax^2+bx+c는

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

와 같이 인수분해된다. 따라서, 이차식은 복소수 범위에서는 언제나 일차식의 곱으로 인수분해할 수 있다.

이차식의 인수분해

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 두 근을 α, β라 하면

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

130 Ⅳ. 방정식과 부등식

예제 3 다음 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하여라.

(1) x^2+4 (2) x^2+2x+5

| 풀이 | (1) 이차방정식 $x^2+4=0$의 근을 구하면 $x^2=-4$, $x=\pm2i$

$$\therefore\ x^2+4=(x+2i)(x-2i)$$

(2) 이차방정식 $x^2+2x+5=0$의 근을 구하면

$$x=-1\pm\sqrt{1^2-1\cdot5}=-1\pm2i$$
$$\therefore\ x^2+2x+5=\{x-(-1+2i)\}\{x-(-1-2i)\}$$
$$=(x+1-2i)(x+1+2i)$$

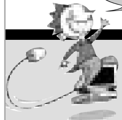
답 (1) $(x+2i)(x-2i)$ (2) $(x+1-2i)(x+1+2i)$

이차식 x^2+4, x^2+2x+5는 실수 범위에서는 인수분해되지 않지만 복소수 범위에서는 인수분해된다.

줄기 **문제 5** 다음 이차식을 복소수 범위에서 인수분해하여라.

(1) x^2-2 (2) $4x^2+4x+1$

(3) x^2-2x+2 (4) $2x^2+4x+3$



디오판토스(Diophantos : 246?~330?)는 '산학'에서 미지수의 거듭제곱, 뺄셈, 등호, 역수 등을 그리스어의 첫 글자를 따서 기록하고 있다.

예 $x^3+13x^2 \longrightarrow K^T\alpha\Delta^T\iota\gamma$

(여기서 α는 $x^3(K^T)$의 계수 1, $\iota\gamma$는 $x^2(\Delta^T)$의 계수 13을 뜻한다.)

그 후, 비에트는 미지수를 A, E, I, O, U, Y 등의 모음 대문자로 나타내고, 기지수는 B, D, G 등의 자음 대문자를 사용하였으며, '미지수의 제곱'은 'A quadratum', '미지수의 세제곱'은 'A cubus' 등으로 나타내었다. 한편, 해리엇(Harriot, T.;1560~1621)은 비에트의 방법을 보완하여 '미지수의 제곱'을 'AA', '미지수의 세제곱'을 'AAA'로 사용하여 보다 간단히 표현하였고, 데카르트(Descartes, R.;1596~1650)는 미지수를 알파벳 소문자 x, y, z, 기지수를 알파벳 소문자 a, b, c 등으로 사용하고, 거듭제곱의 표현을 x^2, x^3 등으로 나타내어 오늘날의 방정식의 표현에 전통을 세웠다.


비에트(Viète)

예 비에트 → A quadratum+B plano 3 in A, aequatur Z solido 2

해리엇 → AA+3BBA=2ZZ

데카르트 → $x^2+3a^2x=2b^2$

1. 이차방정식 131

줄기 **문제 5** ◇복소수 범위에서 이차식의 인수분해

(1) $x^2-2=0$의 두 근이 $x=\pm\sqrt{2}$이므로

$$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

(2) $4x+4x+1=0$의 두 근이 $x=-\frac{1}{2}$이므로

$$4x^2+4x+1=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=(2x+1)^2$$

(3) $x^2-2x+2=0$의 두 근이 $x=1\pm i$이므로

$$x^2-2x+2=(x-1-i)(x-1+i)$$

(4) $2x^2+4x+3=0$의 두 근이 $x=\frac{-2\pm\sqrt{2}\,i}{2}$

이므로

$$2x^2+4x+3$$
$$=2\left(x-\frac{-2+\sqrt{2}\,i}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{2}\,i}{2}\right)$$



형성 평가

1 기본 두 근이 $3-i$, $3+i$이고, x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

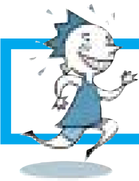
답 : $x^2-6x+10=0$

2 보충 이차방정식 $x^2-6x+8=0$의 두 근의 합과 곱을 구하여라.

답 : 합 : 6, 곱 : 8

3 심화 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $b=a+c$일 때, 근의 종류를 판별하여라.

답 : 실근



탐구하는 수학 ▶ 7차시

문제 해결력 향상을 위한 과제

교과서 132쪽

탐구하는 수학 — 문제 해결력 향상을 위한 과제

1 창의력 · 문제 해결력

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$이 하나의 허근 $\alpha+\beta i$(α, β는 실수)를 가지면 나머지 한 근은 그 근의 켤레복소수임을 다음 과정에 의하여 밝혀 보자.

문제 해결 과정 1

(1) 이차방정식의 근의 공식을 말하여라.

(2) 이차방정식이 허근을 가진다면 판별식 D의 부호는 어떻게 되는가?

(3) 근의 공식을 D를 사용하여 나타내고, 이차방정식의 두 근을 a, b, D를 사용한 식으로 나타내어라.

(4) α, β를 각각 a, b, D를 사용하여 나타내어라.

(5) 위의 (3)에서의 나머지 한 근을 α, β를 사용하여 나타내어라.

문제 해결 과정 2

(1) 허근 $\alpha+\beta i$를 이차식 ax^2+bx+c에 대입했을 때, 실수부분과 허수부분을 말하여라.

(2) 복소수 $p+qi$에서 $p+qi=0$이면 두 실수 p, q의 값은 얼마인가?

(3) $\alpha+\beta i$가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 한 근일 때, 위의 (1)과 (2)에서 알 수 있는 것은 무엇인가?

(4) 이차식 ax^2+bx+c에 $x=\alpha-\beta i$를 대입하면 그 값은 얼마인가?

(5) 위의 (3)과 (4)로부터 $\alpha-\beta i$가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 근이라고 말할 수 있는가?

132 Ⅳ. 방정식과 부등식

1 이차방정식의 두 근은 켤레복소수

창의력 · 문제 해결력

문제 해결 과정 1

(1) $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(2) $D=b^2-4ac<0$

(3) $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

따라서, 두 근은

$$x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{-D}i}{2a}$$
$$=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{-D}}{2a}i$$

또는 $x=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-b-\sqrt{-D}i}{2a}$

$$=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{-D}}{2a}i$$

(4) $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$, $\beta=\dfrac{\sqrt{-D}}{2a}$ 또는 $\beta=-\dfrac{\sqrt{-D}}{2a}$

(5) $\alpha-\beta i$

문제 해결 과정 2

(1) ax^2+bx+c의 x대신에 $\alpha+\beta i$를 대입하여 전개하면

$a(\alpha+\beta i)^2+b(\alpha+\beta i)+c$

$=a(\alpha^2+2\alpha\beta i-\beta^2)+b(\alpha+\beta i)+c$

$=\{a(\alpha^2-\beta^2)+b\alpha+c\}+(2a\alpha\beta+b\beta)i$

따라서,

실수부분 : $a(\alpha^2-\beta^2)+b\alpha+c$

허수부분 : $2a\alpha\beta+b\beta$

(2) $p=0$, $q=0$

(3) $a(\alpha+\beta i)^2+b(\alpha+\beta i)+c=0$

이므로 좌변의 실수부분과 허수부분이 모두 0이어야 한다. 따라서,

$a(\alpha^2-\beta^2)+b\alpha+c=0$

$2a\alpha\beta+b\beta=0$

(4) ax^2+bx+c

$=a(\alpha-\beta i)^2+b(\alpha-\beta i)+c$

$=a(\alpha^2-2\alpha\beta i-\beta^2)+b(\alpha-\beta i)+c$

$=\{a(\alpha^2-\beta^2)+b\alpha+c\}-(2a\alpha\beta+b\beta)i$

(5) 위의 (3)에서

$a(\alpha^2-\beta^2)+b\alpha+c=0$

$2a\alpha\beta+b\beta=0$

을 만족하므로 (4)의 식은 실수부분과 허수부분이 모두 0이 된다.

즉, $\alpha-\beta i$는 $ax^2+bx+c=0$을 만족하므로 이 방정식의 근이라 할 수 있다.



연습 문제 A

연습 문제 A

뿌리 1 다음 이차방정식의 해를 구하여라.

(1) $x^2+6x-3=0$ (2) $x^2-5x+7=0$

(3) $3x(x-1)+1=0$ (4) $x^2-5x+1=0$

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 근의 공식은?

뿌리 2 다음 이차방정식의 근을 판별하여라.

(1) $6x^2-8x-7=0$ (2) $x^2+3x+3=0$

(3) $(2x-1)^2=4x$ (4) $9+x^2=6x$

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 판별식 D를 이차방정식의 계수로 나타내면?

뿌리 3 이차방정식 $x^2-px+p-1=0$이 중근을 가지도록 p의 값을 구하여라.

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$이 중근을 가질 판별식 D의 조건은?

줄기 4 이차방정식 $x^2+5x-4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ (2) $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha$

(3) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ (4) $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}+\dfrac{\beta}{\beta+1}$

> $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$와 $\alpha\beta$ 의 값은?

열매 5 형과 동생의 나이의 합은 30이고, 나이의 곱은 221이라고 한다. 형의 나이는 몇 살인가?

> 두 근의 합이 p이고, 두 근의 곱이 q이며 이차항의 계수가 1인 이차방정식은?

줄기 6 다음의 이차식을 복소수의 범위에서 인수분해하여라.

(1) $x^2-8x+12$ (2) $4x^2-3x+1$

(3) $2x^2-8x-5$ (4) x^2+5

> $4x^2-3x+1=0$ 의 근은?

1. 이차방정식 133

연습 문제 A

1 이차방정식의 해 구하기

(1) $x=-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot(-3)}$

$=-3\pm\sqrt{12}=-3\pm2\sqrt{3}$

(2) $x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1}$

$=\dfrac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$

(3) $3x(x-1)+1=0$

$3x^2-3x+1=0$

$x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3}$

$=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{6}$

(4) $x^2-5x+1=0$

$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

2 근의 판별

(1) $\dfrac{D}{4}=(-4)^2-6\cdot(-7)=58>0$

∴ 서로 다른 두 실근

(2) $D=3^2-4\cdot1\cdot3=-3<0$

∴ 서로 다른 두 허근

(3) $(2x-1)^2=4x$

$4x^2-8x+1=0$

$\dfrac{D}{4}=4^2-4\cdot1=12>0$

∴ 서로 다른 두 실근

(4) $x^2-6x+9=0$

$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot9=0$

∴ 중근

3 판별식의 활용

$x^2-px+p-1=0$이 중근을 가지려면 $D=0$이어야 한다.

$D=(-p)^2-4(p-1)=0$

$p^2-4p+4=(p-2)^2=0$

∴ $p=2$

4 근과 계수의 관계 활용

$x^2+5x-4=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=-4$이다.

(1) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$=(-5)^2-(-4)=29$

(2) $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha=\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-4)\times(-5)=20$

(3) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{(-5)^2-2(-4)}{-4}=-\dfrac{33}{4}$

(4) $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}+\dfrac{\beta}{\beta+1}=\dfrac{2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}$

$=\dfrac{2(-4)+(-5)}{(-4)+(-5)+1}=\dfrac{13}{8}$

5 이차방정식의 활용

형의 나이를 x살이라 하면, 동생의 나이는 $(30-x)$살이므로

$x(30-x)=221$

$x^2-30x+221=0$

$(x-17)(x-13)=0$

$\therefore\ x=13,\ 17$

따라서, 형은 17살이다.

6 이차식의 인수분해

(1) $x^2-8x+12=(x-2)(x-6)$

(2) $4x^2-3x+1=0$의 근을 구하면

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot4\cdot1}}{8}$

$=\dfrac{3\pm\sqrt{7}i}{8}$

$\therefore\ 4x^2-3x+1$

$=4\left(x-\dfrac{3+\sqrt{7}i}{8}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{7}i}{8}\right)$

(3) $2x^2-8x-5=0$의 근을 구하면

$x=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-2\cdot(-5)}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{26}}{2}$

$2x^2-8x-5=2\left(x-\dfrac{4+\sqrt{26}}{2}\right)\left(x-\dfrac{4-\sqrt{26}}{2}\right)$

(4) $x^2+5=0$의 근을 구하면

$x^2=-5\quad\therefore\ x=\pm\sqrt{5}i$

$x^2+5=(x-\sqrt{5}i)(x+\sqrt{5}i)$

연습 문제 B



1 다음 이차방정식의 해를 구하여라.

(1) $x^2-7x+12=0$ (2) $x^2+6x+9=0$

(3) $4x^2+3=0$ (4) $4x^2+3x+2=0$

2 이차방정식 $x^2-3x+k=0$이 중근을 가지도록 k의 값을 구하여라.

3 이차방정식 $x^2+ax+b=0(a\neq0)$의 두 근이 $1+3i$, $1-3i$일 때, a, b의 값을 구하여라.





4 다음 이차방정식의 해를 구하여라.

(1) $x^2-\sqrt{7}x+2=0$ (2) $2(x+1)^2-6x-1=0$

5 k가 실수일 때, 다음 이차방정식의 근을 판별하여라.

(1) $(x+1)(x-3)=k^2+4$

(2) $kx^2-2kx+k+1=0$(단, $k\neq0$)

6 이차방정식 $2x^2+5x+10=0$의 두 근을 α, β라 할 때, α^2+1, β^2+1을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

7 이차방정식 $x^2-3x+m=0$의 두 근의 차가 4일 때, 실수 m의 값을 구하여라.

134 Ⅳ. 방정식과 부등식

연습 문제 B

1 이차방정식의 해 구하기

(1) $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)=0$

$\therefore\ x=3,\ 4$

(2) $x^2+6x+9=(x+3)^2=0$

$\therefore\ x=-3$ (중근)

(3) $4x^2+3=0,\ \ x^2=-\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

(4) $4x^2+3x+2=0$에서

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-32}}{8}=\dfrac{-3\pm\sqrt{23}i}{8}$

2 판별식의 활용

이차방정식이 중근을 가지려면 판별식 $D=0$이어야 하므로

$$D=(-3)^2-4k=9-4k=0$$

$$\therefore k=\frac{9}{4}$$

3 근과 계수의 관계 활용

$$-a=(1+3i)+(1-3i)=2$$

$$b=(1+3i)(1-3i)=10$$

$$\therefore a=-2,\ b=10$$

4 이차방정식의 해 구하기

(1) $x=\frac{\sqrt{7}\pm\sqrt{7-8}}{2}=\frac{\sqrt{7}\pm i}{2}$

(2) $2(x+1)^2-6x-1=2x^2-2x+1=0$

$$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-2}}{2}=\frac{1\pm i}{2}$$

5 판별식의 활용

(1) $(x+1)(x-3)=k^2+4$

$x^2-2x-3=k^2+4$

$x^2-2x-k^2-7=0$에서

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-k^2-7)=k^2+8>0$

$\therefore$ 서로 다른 두 실근

(2) $kx^2-2kx+k+1=0\ (k\neq0)$

$\frac{D}{4}=(-k)^2-k(k+1)$

$=k^2-k^2-k=-k$

$\therefore k<0$이면 서로 다른 두 실근

$k>0$이면 서로 다른 두 허근

6 근과 계수의 관계 활용

$2x^2+5x+10=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$\alpha+\beta=-\frac{5}{2},\ \alpha\beta=5$이다.

$\alpha^2+1,\ \beta^2+1$을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 방정식은

$$x^2-(\alpha^2+1+\beta^2+1)x+(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=0$$

$(\alpha^2+1)+(\beta^2+1)$

$=\alpha^2+\beta^2+2$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2$

$=\left(-\frac{5}{2}\right)^2-2\cdot5+2=-\frac{7}{4}$

$(\alpha^2+1)(\beta^2+1)$

$=\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1$

$=(\alpha\beta)^2+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+1=\frac{89}{4}$

따라서, 구하는 방정식은

$$x^2+\frac{7}{4}x+\frac{89}{4}=0$$

7 근과 계수의 관계 활용

$x^2-3x+m=0$의 두 근의 차가 4이므로 두 근을 $\alpha,\ \alpha+4$로 놓을 수 있다.

근과 계수의 관계를 이용하면

$\alpha+\alpha+4=3$ ①

$\alpha(\alpha+4)=m$ ②

①에서 $2\alpha=-1$

$\therefore \alpha=-\frac{1}{2}$ ③

③을 ②에 대입하면

$$m=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+4\right)=-\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}=-\frac{7}{4}$$

$$\therefore m=-\frac{7}{4}$$

§1. 삼차방정식과 사차방정식 ▶ 8~9차시

지도 목표

1. 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 인수분해를 이용하여 풀 수 있도록 지도한다.
2. 인수정리를 이용하여 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있도록 지도한다.
3. 삼차방정식과 사차방정식의 활용 문제를 풀 수 있도록 지도한다.

지도상의 유의점

1. 일반적인 삼차방정식과 사차방정식의 풀이는 복잡하므로 인수분해가 되는 경우만을 주로 다룬다.
2. 실수 계수의 삼차방정식은 3개의 근을 가짐을 이해시킨다. 이 때, 한 개의 근은 반드시 실수이어야 하고, 나머지 두 개의 근은 모두 실수이거나 켤레복소수가 됨을 이해시킨다.
3. $x^3=1$의 한 허근을 ω라 하면,

   $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$

   이므로 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$임을 이해하도록 지도한다.
4. 인수정리와 조립제법을 이용하여 삼차방정식과 사차방정식을 인수분해한 후에 근을 구할 수 있도록 지도한다.

본문 해설

1 생각해 봅시다 ⇨삼차방정식의 근

주어진 꽃병의 부피를 구하는 과정에서 삼차방정식을 세우고 그 근을 구해본다.

물음1 $250\times8=2000(\text{mL})$

물음2 $2x$

물음3 $2x^3=2000 \quad \therefore x=10(\text{cm})$

2 삼차방정식과 사차방정식의 뜻을 이해하게 하고, 인수분해를 이용하여 해를 구할 수 있도록 지도한다.

2 여러 가지 방정식

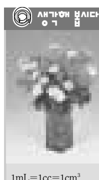
교과서 135쪽

§1. 삼차방정식과 사차방정식

■ 간단한 삼차방정식과 사차방정식을 풀 수 있다.

삼차방정식과 사차방정식의 풀이

1 생각해 봅시다



1mL=1cc=1cm³

밑면이 정사각형이고, 높이가 밑면의 한 변의 길이의 2배가 되는 직육면체 모양의 꽃병이 있다. 이 꽃병에 250mL의 잔에 물을 가득 채워서 부었더니 8번만에 꽃병이 가득 찼다고 한다. 다음 물음에 답하여라.

물음 1 꽃병의 부피는 몇 mL 인가?

물음 2 밑면의 한 변의 길이를 $x$cm 라 할 때, 높이는 몇 cm 인가?

물음 3 x를 구하는 방정식을 세우고, 그 해를 구하여라.

2 $x^3-x^2+2x+1=0$, $2x^4+5x^2-3=0$과 같이 x에 대한 다항식 $P(x)$의 차수가 삼차 또는 사차일 때, 방정식

$$P(x)=0$$

을 각각 x에 관한 **삼차방정식**, **사차방정식**이라 한다.

일반적인 삼차방정식과 사차방정식의 풀이는 간단하지 않으므로, 여기서는 인수분해를 이용하여 풀 수 있는 경우만을 다루기로 한다.

뿌리 문제 1 ⇨집합 구분과 집합의 원소찾기

(1) $x^3+x=x(x^2+1)=0 \quad \therefore x=0,\ x=\pm i$

(2) $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$\therefore x=-2,\ x=1\pm\sqrt{3}\,i$

(3) $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=0$

$\therefore x=\pm1,\ \pm i$

(4) $x^4+2x^2-3=(x^2-1)(x^2+3)=0$

$\therefore x=\pm1,\ \pm\sqrt{3}\,i$

열매 문제 2 ⇨삼차방정식 $x^3=1$의 허근

(1) ω가 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$의 한 근이고, $\omega-1\neq0$이므로 $\omega^2+\omega+1=0$이다.

(2) $\omega^2=-\omega-1$은 허수이고, $\omega^3=1$이므로 $(\omega^2)^3=(\omega^3)^2=1$이 된다. 따라서, ω^2은 $x^3=1$의 한 허근이다.

예제 1 삼차방정식 $x^3-1=0$을 풀어라.

|풀이| 좌변을 인수분해하면

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore\ x=1 \text{ 또는 } x^2+x+1=0$$

따라서, 구하는 근은 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

|참고| 이차방정식이 복소수의 범위 내에서 2개의 근을 가지는 것과 같이, 실수 계수를 가지는 삼차방정식은 복소수의 범위 내에서 3개의 근을 가진다. 이 때, 한 근은 반드시 실수이며 나머지 두 근은 모두 실수이거나 켤레복소수가 된다. (130쪽 참조)

뿌리 **문제 1** 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3+x=0$　　(2) $x^3+8=0$

(3) $x^4-1=0$　　(4) $x^4+2x^2-3=0$

열매 **문제 2** 삼차방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음에 답하여라.

(1) $\omega^2+\omega+1=0$이 성립함을 보여라.

(2) 다른 한 허근이 ω^2임을 밝혀라.

(3) $\omega^3+\omega^2+1=1-\omega$임을 보여라.

(4) $\omega^{2002}+\omega^6+\omega^2$의 값을 구하여라.

(1) x^3-1
$=(x-1)(x^2+x+1)$
(2) $(\omega^2)^3=(\omega^3)^2$
(3), (4) $\omega^2=-\omega-1$

3 x에 대한 다항식 $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어 떨어지기 위한 필요충분조건은 $P(\alpha)=0$

x에 대한 다항식 $P(x)$에서 $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖는다. 따라서, $P(x)$는

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)\ (\text{단, } Q(x)\text{는 } x\text{에 대한 다항식})$$

와 같이 인수분해할 수 있다.

따라서, 이것을 이용하여 삼차방정식과 사차방정식의 근을 구할 수 있다.

136 Ⅳ. 방정식과 부등식

예제 2 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3+2x^2-16=0$　　(2) $x^4+3x^3+3x^2-x-6=0$

|풀이| (1) $P(x)=x^3+2x^2-16$이라 하면

$$P(2)=8+8-16=0$$

2	1	2	0	−16
		2	8	16
	1	4	8	0

따라서, $P(x)$는 인수 $x-2$를 가진다. 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$P(x)=(x-2)(x^2+4x+8)$$

이므로, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2+4x+8)=0$이다.

$$\therefore\ x-2=0 \text{ 또는 } x^2+4x+8=0$$

$$\therefore\ x=2 \text{ 또는 } x=-2\pm2i$$

(2) $P(x)=x^4+3x^3+3x^2-x-6$이라 하면

$$P(1)=1+3+3-1-6=0$$

1	1	3	3	−1	−6
		1	4	7	6
−2	1	4	7	6	0
		−2	−4	−6	
	1	2	3	0	

따라서, $P(x)$는 인수 $x-1$을 가진다. 즉,

$$P(x)=(x-1)(x^3+4x^2+7x+6)$$

이 때, $Q(x)=x^3+4x^2+7x+6$이라 하면

$$Q(-2)=-8+16-14+6=0$$

이므로 $Q(x)$는 인수 $x+2$를 가진다.

따라서, 주어진 방정식은 $(x-1)(x+2)(x^2+2x+3)=0$

$$\therefore\ x-1=0 \text{ 또는 } x+2=0 \text{ 또는 } x^2+2x+3=0$$

$$\therefore\ x=1,\ x=-2,\ x=-1\pm\sqrt{2}i$$

답 (1) $x=2,\ x=-2\pm2i$　(2) $x=1,\ x=-2,\ x=-1\pm\sqrt{2}i$

줄기 **문제 3** 다음 방정식을 풀어라.

(1) $4x^3-3x-1=0$　　(2) $x^4+2x^3+2x^2-2x-3=0$

(3) $x^4-4x+3=0$　　(4) $3(x-1)^3-2(x-1)-1=0$

2. 여러 가지 방정식 137

(3) $\omega^2+\omega+1=0$이고, $\omega^3=1$이므로

$$\omega^3+\omega^2+1=1-\omega$$

(4) $\omega^{2002}+\omega^6+\omega^2=(\omega^3)^{667}\cdot\omega+(\omega^3)^2+\omega^2$

$$=\omega+1+\omega^2=0$$

3 인수정리를 이용하여 $P(x)$에서 $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 $(x-\alpha)$를 인수로 가지므로 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$와 같이 인수분해됨을 이해하도록 지도한다.

줄기 문제 3

인수정리를 이용한 방정식 풀이

(1) $P(x)=4x^3-3x-1$이라 하면, $P(1)=0$이다. 이 때, 조립제법을 이용하면

1	4	0	−3	−1
		4	4	1
	4	4	1	0

따라서, 주어진 방정식은

$$(x-1)(4x^2+4x+1)=0$$

$$(x-1)(2x+1)^2=0$$

$$\therefore\ x=1,\ -\frac{1}{2}\ (\text{중근})$$

(2) 주어진 식에 조립제법을 이용하면

1	1	2	2	−2	−3
		1	3	5	3
−1	1	3	5	3	0
		−1	−2	−3	
	1	2	3	0	

따라서, 주어진 방정식은

$$(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)=0$$

$$\therefore\ x=\pm1,\ -1\pm\sqrt{2}i$$

(3) 조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해하면

$$(x-1)^2(x^2+2x+3)=0$$

$$\therefore\ x=1\ (\text{중근}),\ -1\pm\sqrt{2}i$$

138
교과서

4 **심화 과정**

삼차방정식과 사차방정식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.



1 개똥벌레에서 나오는 빛은 기온이 섭씨 $x°$일 때, 다음과 같은 식으로 주어진다.

$$L(x)=10+0.3x+0.4x^2-0.01x^3$$

이 때, $L(x)$는 광원으로부터 방출되어 눈에 감지되는 광선의 총 출력양이며, 단위는 lm(Lu-men)이다.

이 개똥벌레에 의한 광선의 총 출력양이 96 lm 이었다면 그 때의 기온은 몇 도인가? (단, 소수 첫째 자리에서 반올림하여라.)

1lm(루멘)의 광선이 $1m^2$의 넓이에 균일하게 비출 때의 빛의 밝기를 1Lux 라 하고, 공식 경기를 위한 실내 운동장의 조명 기준은 750~1500 Lux이다.



| 풀이 | 기온이 섭씨 $x°$일 때 광선의 총 출력양이 96 lm 이면 다음 방정식이 성립한다.

$$96=10+0.3x+0.4x^2-0.01x^3$$

양변에 100 을 곱하여 정리하면

$$x^3-40x^2-30x+8600=0$$

인수정리를 이용하여 좌변을 인수분해하면

20	1	−40	−30	8600
		20	−400	−8600
	1	−20	−430	0

$(x-20)(x^2-20x-430)=0$

$\therefore\ x-20=0$ 또는

$x^2-20x-430=0$

$\therefore\ x=20$ 또는 $x=10\pm\sqrt{530}$

즉, $x=20,\ 33,\ -13$이다.

답 $-13°,\ 20°,\ 33°$



문제 1 어느 화원에서 글라디올러스를 포장하여 운송하기 위해 직육면체 모양의 긴 상자를 만들기로 하였다.

밑면의 한 변의 길이가 다른 변의 길이의 3 배가 되고, 높이는 밑면의 짧은 변의 길이보다 10 cm 길게 만들었더니, 이 상자의 부피가 $108000cm^3$가 되었다. 이 상자의 각 모서리의 길이를 구하여라.

138 Ⅳ. 방정식과 부등식

(4) $x-1=X$라 놓으면 주어진 식은 $3X^3-2X-1=0$이 된다. 이 식에 조립제법을 이용하면

$$(X-1)(3X^2+3X+1)=0$$

$$\therefore\ X=1,\ \frac{-3\pm\sqrt{3}\,i}{6}$$

$X=x-1$이므로 $x=2,\ \dfrac{3\pm\sqrt{3}\,i}{6}$

심화 과정

4 삼차방정식과 사차방정식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있도록 지도한다.



문제 1

삼차방정식의 활용

밑면의 짧은 변의 길이를 $x$cm라 하면, 긴 변의 길이는 $3x$cm가 되고, 높이는 $(x+10)$cm이다.

따라서, 부피는

$$x\cdot 3x\cdot(x+10)=108000$$

$$x^3+10x^2-36000=0$$

조립제법을 사용하면

30	1	10	0	−36000
		30	1200	36000
	1	40	1200	0

따라서, 주어진 방정식은

$$(x-30)(x^2+40x+1200)=0$$

$$\therefore\ x=30 \text{ 또는 } -20\pm20\sqrt{2}\,i$$

따라서, 세 모서리의 길이는 30cm, 90cm, 40cm이다.



형성 평가

기본 다음 방정식을 풀어라.

$$(x+2)^3+(x+2)^2-(x+2)+2=0$$

답 : $x=-4,\ x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

보충 방정식 $x^3-6x^2+11x-6=0$을 풀어라. 답 : $x=1,\ 2,\ 3$

심화 정육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 1cm, 2cm, 3cm씩 늘여서 직육면체를 만들었더니 그 부피가 $120cm^3$가 되었다. 늘이기 전의 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. 답 : 3cm

§2. 연립방정식

▶ 10~11차시

지도 목표

1. 미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀 수 있게 한다.
2. 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있게 한다
3. 연립방정식의 활용 문제를 풀 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 중학교에서 배운 미지수가 2개인 연립일차방정식을 복습하고, 같은 방법으로 미지수가 3개인 연립일차방정식에서 미지수를 하나 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식을 만든 후에 풀도록 지도한다.
2. 미지수가 2개인 연립이차방정식에서는 미지수 하나를 소거하여 미지수가 1개인 이차방정식으로 만들어 풀도록 지도한다.
3. 실생활의 문제에서 상황에 맞는 연립방정식을 세우고, 그 방정식을 풀 수 있도록 지도한다.

본문 해설

1 생각해 봅시다 ⇨ 미지수가 3개인 연립일차방정식의 풀이

미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀어 보고, 미지수가 3개인 연립일차방정식의 풀이법을 생각해 보도록 지도한다.

물음1 $\begin{cases} 600x+800y=3600 & \cdots ① \\ x+y=5 & \cdots ② \end{cases}$

물음2 ②를 ①에 대입하면

$600x+4000-800x=3600$

$200x=400$

$\therefore\ x=2,\ \ y=5-x=3$

즉, 크림 빵 2개, 피자 빵 3개를 샀다.

물음3 $\begin{cases} 600a+800b+500c=3500 \\ a+b+c=6 \\ a+b=c \end{cases}$

§2. 연립방정식

■ 미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀 수 있다.
■ 미지수가 2개인 연립이차방정식을 풀 수 있다.

미지수가 3개인 연립일차방정식의 풀이

생각해 봅시다



정우와 지연이는 제과점에 같이 가서 빵을 샀다. 다음 물음에 답하여라.

물음 1 정우는 600원짜리 크림 빵과 800원짜리 피자 빵을 합하여 5개를 사고 3600원을 지불하였다. 정우가 산 크림 빵의 개수를 x, 피자 빵의 개수를 y라 놓고, 위의 내용에 맞는 방정식을 세워 보아라.

물음 2 정우는 크림 빵과 피자 빵을 각각 몇 개씩 샀는가?

물음 3 지연이는 크림 빵과 피자 빵, 또 500원짜리 아이스 크림까지 모두 6개를 사고 3500원을 지불하였는데 지연이가 산 빵의 개수의 합과 아이스 크림의 개수는 같다고 한다. 지연이가 산 크림 빵의 개수를 a, 피자 빵의 개수를 b, 아이스 크림의 개수를 c라 놓고, 위의 내용에 맞는 방정식을 세워 보아라.

물음 4 지연이가 산 크림 빵과 피자 빵, 아이스 크림의 개수를 각각 구하여라.

미지수가 2개인 연립일차방정식을 풀 때에는 미지수를 하나 소거하여 미지수가 1개인 일차방정식으로 만들어서 풀었다.

미지수가 3개인 연립일차방정식의 경우에도 같은 방법으로 미지수를 하나씩 소거하여 풀면 된다.

2. 여러 가지 방정식 139

물음4 $a+b+c=6$이고, $a+b=c$이므로

$2c=6\quad \therefore\ c=3$

이다. 따라서, 주어진 방정식은

$\begin{cases} 600a+800b=2000 \\ a+b=3 \end{cases}$

이 되고, 이것을 풀면 $a=2,\ b=1$이 된다.

따라서, 지연이가 산 것은 크림 빵 2개, 피자 빵 1개, 아이스 크림 3개이다.

2 미지수가 3개인 연립일차방정식을 풀 때에는 미지수를 하나 소거하여 미지수가 2개인 연립일차방정식으로 만들어서 풀도록 지도한다.

뿌리 문제 1 ⇨ 미지수가 3개인 연립일차방정식

(1) $\begin{cases} x-3y+z=11 & \cdots ① \\ x+3y-2z=-4 & \cdots ② \\ 3x+y+2z=12 & \cdots ③ \end{cases}$

2 **예제 1** 다음 연립일차방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x+y-2z=-2 & \cdots\cdots ① \\ -x+y+2z=7 & \cdots\cdots ② \\ 3x-2y+z=2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=1 & \cdots\cdots ① \\ y+z=4 & \cdots\cdots ② \\ z+x=7 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

| 풀이 | (1) 미지수가 2개인 연립방정식을 만들기 위하여 다음과 같이 z를 소거한다.

①+②에서

$$\begin{array}{rl} & 2x+y-2z=-2 \\ + & -x+y+2z=7 \\ \hline & x+2y \quad =5 \quad \cdots\cdots ④ \end{array}$$

②−③×2에서

$$\begin{array}{rl} & -x+\ y+2z=7 \\ - & 6x-4y+2z=4 \\ \hline & -7x+5y \quad =3 \quad \cdots\cdots ⑤ \end{array}$$

이제 x, y에 대한 두 방정식 ④, ⑤를 푼다.

④×7+⑤에서

$$\begin{array}{rl} & 7x+14y=35 \\ + & -7x+\ 5y=\ 3 \\ \hline & 19y=38 \end{array} \quad \therefore\ y=2$$

$y=2$를 ④에 대입하면

$x+2\times2=5$ $\quad\therefore\ x=1$

$x=1$, $y=2$를 ③에 대입하면

$3\times1-2\times2+z=2$ $\quad\therefore\ z=3$

(2) ①+②+③에서 $2x+2y+2z=12$

$\therefore\ x+y+z=6$ $\quad\cdots\cdots ④$

④−①에서 $z=5$

④−②에서 $x=2$

④−③에서 $y=-1$

답 (1) $x=1$, $y=2$, $z=3$ (2) $x=2$, $y=-1$, $z=5$

풀기 문제 1 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x-3y+z=11 \\ x+3y-2z=-4 \\ 3x+y+2z=12 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=8 \\ x+z=7 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-2y-z=6x+y+2z=2x-y \\ x+y+3z=3 \end{cases}$

미지수가 2개인 연립이차방정식의 풀이

3 생각해 봅시다



어떤 스포츠 센터에서 둘레의 길이가 150m, 넓이가 1250m^2인 직사각형 모양의 수영장을 만들려고 한다. 다음 물음에 답하여라.

물음 1 수영장의 가로의 길이를 xm, 세로의 길이를 ym라 놓고, 위의 내용에 맞는 방정식을 세워 보아라.

물음 2 수영장의 세로의 길이 y를 가로의 길이 x에 대한 식으로 나타내 보아라. 또, 수영장의 넓이를 가로의 길이 x만을 사용한 식으로 나타내어라. 이 식에서 x의 값을 구할 수 있는가?

물음 3 수영장의 가로와 세로의 길이를 구하여라.

4 미지수가 2개인 연립방정식에서 차수가 가장 높은 방정식이 이차방정식일 때, 이것을 미지수가 2개인 **연립이차방정식**이라 한다. 연립이차방정식을 풀 때에도 미지수를 하나 소거하여 해를 구한다.

예제 2 연립방정식 $\begin{cases} x-y=4 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ② \end{cases}$을 풀어라.

| 풀이 | ①에서 $y=x-4$ $\quad\cdots\cdots ③$

③을 ②에 대입하면

$x^2+(x-4)^2=40$, $\quad x^2+x^2-8x+16=40$

$x^2-4x-12=0$, $\quad (x+2)(x-6)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=6$

이것을 ③에 각각 대입하면

$x=-2$일 때 $y=-6$, $x=6$일 때 $y=2$

답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

①×2+②를 하면

$x-y=6$ $\quad$ ④

②+③을 하면 $x+y=2$ $\quad$ ⑤

④+⑤를 하면 $2x=8$ $\quad\therefore\ x=4$

$x=4$를 ④에 대입하면 $y=-2$

이 값을 ①에 대입하면 $z=1$

$\therefore\ x=4,\ y=-2,\ z=1$

(2) $\begin{cases} x+y=5 & ① \\ y+z=8 & ② \\ x+z=7 & ③ \end{cases}$

①+②+③을 하면 $2(x+y+z)=20$

$x+y+z=10$ $\quad$ ④

④−①을 하면 $z=5$

④−②를 하면 $x=2$

④−③을 하면 $y=3$

$\therefore\ x=2,\ y=3,\ z=5$

(3) 주어진 연립방정식의 첫 번째 식은

$2x-2y-z=6x+y+2z$

$6x+y+2z=2x-y$

의 두 식으로 나누어 쓸 수 있다. 즉,

$4x+3y+3z=0$,

$2x+y+z=0$

의 두 식으로 나누어진다. 따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$\begin{cases} 4x+3y+3z=0 & ① \\ 2x+y+z=0 & ② \\ x+y+3z=3 & ③ \end{cases}$

①−②×2, ③×2−②를 각각 하면

$y+z=0$, $y+5z=6$

이 연립방정식을 풀면

$y=-\dfrac{3}{2}$, $z=\dfrac{3}{2}$

위의 값을 ①에 대입하면 $x=0$이다.

$\therefore\ x=0,\ y=-\dfrac{3}{2},\ z=\dfrac{3}{2}$

3 생각해 봅시다

집합 구분과 집합의 원소찾기

주어진 직사각형의 둘레의 길이와 넓이로부터 미지수가 2개인 일차방정식과 이차방정식으로 구성된 연립방정식을 만들고, 이 방정식을 푸는 방법을 이해하도록 지도한다.

물음1 $\begin{cases} 2(x+y)=150 \\ xy=1250 \end{cases}$

물음2 $y=75-x$

$x(75-x)=1250$

이 식은 x에 대한 이차방정식이므로 x의 값을 구할 수 있다.

물음3 $x^2-75x+1250=0$

$(x-25)(x-50)=0$

$\therefore x=25, 50$

따라서, 가로와 세로의 길이는 각각 25m, 50m 또는 50m, 25m이다.

4

연립이차방정식을 풀 때에도 미지수를 하나 소거하여 풀도록 지도한다.

뿌리 문제 2 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} y=7-x \\ x^2+y^2=29 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+xy-y^2=29 \end{cases}$

예제 3

연립방정식 $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ 2x^2-xy-9y^2=6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 을 풀어라.

| 풀이 | ①을 인수분해하면

$(x-2y)(x-3y)=0 \quad \therefore x=2y$ 또는 $x=3y$

따라서, 위의 연립이차방정식은 다음의 두 연립이차방정식으로 나누어 생각할 수 있다.

$\begin{cases} x=2y & \cdots\cdots ①' \\ 2x^2-xy-9y^2=6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3y & \cdots\cdots ①'' \\ 2x^2-xy-9y^2=6 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

(i) $x=2y$일 때, 이것을 ②에 대입하여 정리하면

$y^2=-2 \quad \therefore y=\pm\sqrt{2}i$

그러므로 $y=\sqrt{2}i$일 때, $x=2\sqrt{2}i$

$y=-\sqrt{2}i$일 때, $x=-2\sqrt{2}i$

즉, $\begin{cases} x=2\sqrt{2}i \\ y=\sqrt{2}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{2}i \\ y=-\sqrt{2}i \end{cases}$

(ii) $x=3y$ 일 때, 이것을 ②에 대입하여 정리하면

$y^2=1 \quad \therefore y=\pm1$

그러므로 $y=1$일 때, $x=3$, $y=-1$일 때, $x=-3$

즉, $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

답 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2\sqrt{2}i \\ y=\sqrt{2}i \end{cases}$, $\begin{cases} x=-2\sqrt{2}i \\ y=-\sqrt{2}i \end{cases}$

줄기 문제 3 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2-6xy+5y^2=0 \\ x^2+y^2=26 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 \\ x^2-2xy=3 \end{cases}$

뿌리 문제 2

미지수가 2개인 연립이차방정식

(1) $\begin{cases} y=7-x & ① \\ x^2+y^2=29 & ② \end{cases}$

①을 ②에 대입하여 정리하면

$x^2-7x+10=0$

$\therefore x=2$ 또는 5

$x=2$일 때 $y=5$, $x=5$일 때 $y=2$

$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=5 & ① \\ x^2+xy-y^2=29 & ② \end{cases}$

①의 $y=5-x$를 ②에 대입하면

$x^2-15x+54=0 \quad \therefore x=6$ 또는 9

$x=6$일 때 $y=-1$, $x=9$일 때 $y=-4$

$\therefore \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=9 \\ y=-4 \end{cases}$

줄기 문제 3

미지수가 2개인 연립이차방정식

(1) $\begin{cases} x^2-6xy+5y^2=0 & ① \\ x^2+y^2=26 & ② \end{cases}$

①을 인수분해하면 $(x-5y)(x-y)=0$

(i) $x=5y$일 때, 이것을 ②에 대입하면

$25y^2+y^2=26$, $26y^2=26$

$\therefore y=\pm1$

따라서, $y=1$일 때 $x=5$,

$y=-1$일 때 $x=-5$이다.

(ii) $x=y$일 때, 이것을 ②에 대입하면

$y^2+y^2=26$, $y^2=13$

$\therefore y=\pm\sqrt{13}$

$\therefore y=\sqrt{13}$일 때 $x=\sqrt{13}$,

$y=-\sqrt{13}$일 때 $x=-\sqrt{13}$

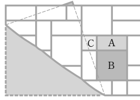
$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-5 \\ y=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=\sqrt{13} \\ y=\sqrt{13} \end{cases}$, $\begin{cases} x=-\sqrt{13} \\ y=-\sqrt{13} \end{cases}$

5 심화 과정

연립방정식을 활용하여 실생활과 관련된 문제를 해결할 수 있다.

예제

1 민호의 할머니께서는 다음과 같은 A, B, C 세 종류의 조각천을 사용하여 오른쪽 그림과 같은 전화 받침을 만드셨다.



A 직사각형 15 개
B 정사각형 5 개
C 정사각형 4 개

이 전화 받침의 가로에는 긴 변의 길이가 4 번, 짧은 변의 길이가 1번 사용되었고, 세로에는 긴 변의 길이가 1번, 짧은 변의 길이가 4 번 사용되었고, 그 넓이는 486cm²이다.
할머니께서 사용하신 직사각형 모양의 조각천의 두 변의 길이를 구하여라.

| 풀이 | 직사각형 모양의 조각천의 두 변 중에서 짧은 쪽의 길이를 x cm, 긴 쪽의 길이를 y cm 라 하자.
그러면 큰 정사각형은 한 변의 길이가 y cm, 작은 정사각형은 한 변의 길이가 x cm 가 되고, 위의 내용에 맞는 방정식을 세우면 다음과 같다.

$$\begin{cases} (x+4y)(4x+y)=486 \\ 4x^2+5y^2+15xy=486 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2+4y^2+17xy=486 & \cdots\cdots ① \\ 4x^2+5y^2+15xy=486 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②－①을 계산하면

$y^2-2xy=0$, $y(y-2x)=0$

$y\neq0$ 이므로 $y-2x=0$ $\therefore y=2x$ ······ ③

③을 ①에 대입하여 정리하면

$4x^2+4(2x)^2+17x(2x)=486$

$\therefore x^2=9$

$x>0$ 이므로 $x=3$ $\therefore y=2x=6$

따라서, 직사각형 모양의 조각천의 두 변의 길이는 각각 3cm, 6cm 이다.

답 3cm, 6cm

2. 여러 가지 방정식 143

심화 과정 

문제 1 길거리 농구 대회에 출전한 정호는 결승전에서 26점을 얻었다. 그 시합에서 정호는 모두 15개의 슛을 성공시켰는데, 2점 슛과 3점 슛의 개수의 합은 자유투의 개수의 2배가 된다고 한다.
이 시합에서 정호가 성공시킨 2점 슛, 3점 슛, 자유투의 개수를 각각 구하여라.



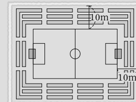
문제 2 찬호는 간식으로 시리얼과 우유, 그리고 사과를 먹었다. 이 간식으로 단백질 11g, 칼슘 110mg 을 섭취하고, 열량 495kcal 를 얻었다고 하면, 찬호는 각각 몇 g 씩 먹었겠는가? (단, 시리얼, 우유, 사과의 각 100g으로 얻을 수 있는 열량과 단백질, 칼슘의 양은 다음 표와 같다.)



16~19세 사이의 남자의 하루 권장 열량, 단백질, 칼슘의 양은 각각 2700 kcal, 75g, 900mg이다. 또, 16~19세의 여자는 각각 2100kcal, 60g, 800 mg이다.

품명	열량(kcal)	단백질(g)	칼슘(mg)
시리얼	400	7.5	0
우유	60	3	50
사과	54	0.2	4

문제 3 대각선의 길이가 170m 인 직사각형 모양의 운동장이 있다. 오른쪽 그림과 같이 일정한 폭 10m 로 관중석을 만들었더니 운동장의 넓이가 4200m²만큼 줄었다고 한다. 줄어든 후의 운동장의 넓이를 구하여라.



144 Ⅳ. 방정식과 부등식

(2) $\begin{cases} x^2-4xy+3y^2=0 & ① \\ x^2-2xy=3 & ② \end{cases}$

①을 인수분해하면 $(x-3y)(x-y)=0$

(i) $x=3y$일 때, ②에 대입하면

$y^2=1$ $\therefore y=\pm1$

따라서, $y=1$일 때 $x=3$,

$y=-1$일 때 $x=-3$이다.

(ii) $x=y$일 때, ②에 대입하면

$-y^2=3$ $\therefore y=\pm\sqrt{3}i$

$\therefore y=\sqrt{3}i$ 일 때, $x=\sqrt{3}i$,

$y=-\sqrt{3}i$ 일 때, $x=-\sqrt{3}i$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=\sqrt{3}i \\ y=\sqrt{3}i \end{cases}$, $\begin{cases} x=-\sqrt{3}i \\ y=-\sqrt{3}i \end{cases}$

심화 과정

5 연립방정식을 활용하여 실생활과 관련된 문제를 해결할 수 있도록 지도한다.

문제 1

연립방정식의 활용

정호가 성공시킨 2점 슛의 개수를 x, 3점 슛의 개수를 y, 자유투의 개수를 z라 하면

$$\begin{cases} 2x+3y+z=26 & ① \\ x+y+z=15 & ② \\ x+y=2z & ③ \end{cases}$$

③을 ②에 대입하면 $3z=15$ $\therefore z=5$

$z=5$를 ①과 ②에 대입하여 정리하면

$$\begin{cases} 2x+3y=21 \\ x+y=10 \end{cases}$$

위의 연립방정식을 풀면 $x=9$, $y=1$

$\therefore x=9$, $y=1$, $z=5$

따라서, 정호는 2점 슛 9개, 3점 슛 1개, 자유투 5개를 성공시켰다.



연립방정식의 활용

시리얼을 $100x$ g, 우유를 $100y$g, 사과를 $100z$g 먹었다고 하면

$$\begin{cases} 400x+60y+54z=495 & \text{①} \\ 7.5x+3y+0.2z=11 & \text{②} \\ 50y+4z=110 & \text{③} \end{cases}$$

①×3−②×160을 하면

$$\begin{array}{rr} & 1200x+180y+162z=1485 \\ - & 1200x+480y+32z=1760 \\ \hline & -300y+130z=-275 \end{array} \quad \text{④}$$

③×6+④를 하면

$$\begin{array}{rr} & 300y+24z=660 \\ + & -300y+130z=-275 \\ \hline & 154z=385 \end{array}$$

$\therefore z=2.5,\ y=2$

y, z의 값을 ②에 대입하면 $x=0.6$

$\therefore x=0.6,\ y=2,\ z=2.5$

따라서, 찬호는 시리얼 60g, 우유 200g, 사과 250g을 먹었다.



삼차방정식의 활용

처음 운동장의 가로와 세로의 길이를 각각 x, y라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=28900 & \text{①} \\ xy-(x-20)(y-20)=4200 & \text{②} \end{cases}$$

②를 정리하면

$xy-xy+20x+20y-400=4200$

$20x+20y=4600$

$x+y=230$ ③

③에서 $y=230-x$를 ①에 대입하여 정리하면

$x^2-230x+12000=0$

$\therefore x=150,\ 80$

따라서, $x=150$일 때 $y=80$, $x=80$일 때 $y=150$이므로 줄어든 후의 운동장의 넓이는

$150\times80-4200=7800(\text{m}^2)$

이다.



형성 평가

1 기본 연립이차방정식 $\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+2y=17 \end{cases}$ 을 풀어라.

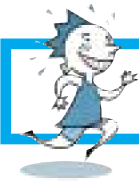
답 : $\begin{cases} x=-1 \\ y=8 \end{cases}$, $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

2 보충 연립일차방정식 $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y+z=3 \\ 2x+3z=5 \end{cases}$ 을 풀어라.

답 : $x=1,\ y=1,\ z=1$

3 심화 세 자리의 자연수가 있다. 각 자리의 숫자의 합은 18이고, 일의 자리 숫자와 백의 자리 숫자의 합은 십의 자리 숫자의 2배라고 한다. 일의 자리 숫자와 백의 자리 숫자를 바꾸었더니 원래의 자연수보다 396만큼 커졌다고 할 때, 원래의 자연수를 구하여라.

답 : 468



탐구하는 수학 ▶ 12차시

문제 해결력 향상을 위한 과제

교과서 145쪽

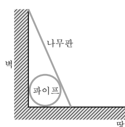
탐구하는 수학 | 문제 해결력 향상을 위한 과제

1
창의력 · 문제 해결력

어느 공사장에서 지름의 길이가 40 cm인 파이프를 벽에 붙여서 땅에 뉘어 놓고, 폭이 130cm인 나무판으로 파이프를 덮었다.



다음 그림과 같이 긴 나무판의 폭의 양 끝점이 땅과 벽에서 만나고, 나무판이 파이프에 접하도록 벽에 기대어 놓았을 때, 나무판이 도로에 많이 나오지 않도록 하려면 벽에서 몇 cm 떨어진 지점에서 기대도록 해야 하는지 다음 과정에 의하여 구하여라.



(1) 원 밖의 한 점 A에서 원에 그은 2개의 접선이 가지는 성질은 무엇인가? 즉, 접선과 그 접점을 한 끝점으로 하는 원의 반지름과의 관계를 알아보고, 점 A에서 2개의 접점까지의 거리를 비교하여라.

(2) (1)의 성질을 이용하여 위의 그림에서 같은 길이를 가지고 있는 것은 어느 것과 어느 것인지 표시해 보아라.

(3) 직각삼각형의 세 변의 길이는 어떤 관계가 있는가?

(4) 위의 (2)와 (3)을 참고하여 주어진 길이 사이의 관계를 살펴보고, 연립방정식으로 표현해 보아라.

(5) 위의 (4)의 연립방정식을 풀어라.

(6) 문제에 맞는 해를 구하여라.

2. 여러 가지 방정식 145

1 이차방정식의 활용

창의력 · 문제 해결력

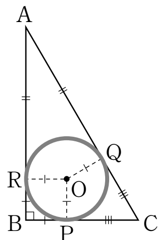
(1) 접선은 원의 반지름과 직교하고, 점 A에서 2개의 접점까지의 거리는 같다.

(2) 오른쪽 그림에서

$\overline{AR}=\overline{AQ}$, $\overline{CP}=\overline{CQ}$,

$\overline{BR}=\overline{BP}=\overline{OR}=\overline{OP}$

$=\overline{OQ}=20$



(3) 직각삼각형의 빗변의 길이를 c, 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b라 하면

$$a^2+b^2=c^2$$

이 성립한다.

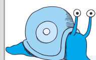
(4) 위의 (2)에서 $\overline{CQ}=x$, $\overline{AQ}=y$라 하면

$$\begin{cases} x+y=130 & \text{①} \\ (x+20)^2+(y+20)^2=130^2 & \text{②} \end{cases}$$

(5) ①의 $y=130-x$를 ②에 대입하면

$$(x+20)^2+(150-x)^2=16900$$
$$2x^2-260x+6000=0$$
$$x^2-130x+3000=0$$
$$(x-30)(x-100)=0$$
$$\therefore \begin{cases} x=30 \\ y=100 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=100 \\ y=30 \end{cases}$$

(6) 나무판이 도로에 많이 나오지 않게 해야 하므로 $x=30$(cm)이다. 따라서, 나무판은 벽에서 50cm 떨어진 지점에서 기대지게 된다.



참고 자료 백계(百鷄) 문제

다음 문제는 6세기 전반의 중국의 수학자 장구건(張邱建)의 저서에 나와 있는 문제로서, 부정방정식의 한 형태이다.

수탉은 1마리에 5원, 암탉은 1마리에 3원, 병아리는 3마리에 1원이다. 100원으로 100마리의 닭을 사려고 하는데, 가능하면 수탉을 많이 사고 싶다고 한다. 수탉, 암탉, 병아리는 각각 몇 마리씩 사야 하는가?

(풀이) 순서대로 x, y, z마리를 산다고 하면

$$\begin{cases} x+y+z=100 & \text{①} \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 & \text{②} \end{cases}$$

②×3−①을 하면 $14x+8y=200$,

$7x+4y=100$, $7x=4(25-y)$

따라서, x는 4의 배수가 된다. $x=4, 8, 12$, 를 ①과 ②에 대입하여 y, z의 값을 구한 후, 그 중에서 x의 최대값을 구하면 된다.

$$\therefore x=12,\ y=4,\ z=84$$



연습 문제 A

교과서 146

연습 문제 A

1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3-3x^2+5x-3=0$ (2) $x^4-4x^3+4x^2-1=0$

x에 대한 다항식 $f(x)$가 $x-2$로 나누어 떨어질 때, $f(2)$의 값은?

2 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x-z=-2 \\ -2y+z=5 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ x-y+z=9 \\ x-2y+3z=20 \end{cases}$

연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases}$을 풀면?

3 $P(x)=ax^2+bx+c$에서

$P(3)=1$, $P(-1)=1$, $P(2)=4$

일 때, 계수 a, b, c의 값을 구하여라.

$P(x)=ax^2+bx+c$에서 $x=3$을 대입하면?

4 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+2xy-4y^2=12 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-2y-3=0 \\ xy=5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2+xy+y^2=81 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x^2-3xy-2y^2=0 \\ 2x^2+y^2=36 \end{cases}$

$x-2y=3$을 y에 관하여 풀면?

5 우리 학교 운동장은 대각선의 길이가 130 m이고, 넓이가 6000 m^2인 직사각형 모양이다. 이 운동장의 둘레의 길이를 구하여라.

가로의 길이가 x이고 세로의 길이가 y인 직사각형의 대각선의 길이는?

146 Ⅳ. 방정식과 부등식

연습 문제 A

1 삼 사차방정식의 해 구하기

(1) $(x-1)(x^2-2x+3)=0$

$\therefore x=1,\ 1\pm\sqrt{2}\,i$

(2) $(x-1)^2(x^2-2x-1)=0$

$\therefore x=1$ (중근), $1\pm\sqrt{2}$

2 미지수가 3개인 연립일차방정식 풀기

(1) $\begin{cases} 2x+y+z=4 & \cdots① \\ x-z=-2 & \cdots② \\ -2y+z=5 & \cdots③ \end{cases}$

①+②에서 $3x+y=2$ ④

②+③에서 $x-2y=3$ ⑤

위의 ④, ⑤의 연립방정식을 풀면

$x=1,\ y=-1$

위의 값을 ②에 대입하면 $z=3$

$\therefore x=1,\ y=-1,\ z=3$

(2) $\begin{cases} 2x+y+z=5 & \cdots① \\ x-y+z=9 & \cdots② \\ x-2y+3z=20 & \cdots③ \end{cases}$

①+②에서 $3x+2z=14$ ④

①×2+③에서 $5x+5z=30$ ⑤

위의 ④, ⑤의 연립방정식을 풀면 $x=2,\ z=4$

위의 값을 ②에 대입하면 $y=-3$

$\therefore x=2,\ y=-3,\ z=4$

3 연립일차방정식의 활용

$\begin{cases} P(3)=9a+3b+c=1 & \cdots① \\ P(-1)=a-b+c=1 & \cdots② \\ P(2)=4a+2b+c=4 & \cdots③ \end{cases}$

①−②에서 $2a+b=0$ ④

①−③에서 $5a+b=-3$ ⑤

위의 ④, ⑤의 연립방정식을 풀면 $a=-1,\ b=2$

위의 값을 ②에 대입하면 $c=4$

$\therefore a=-1,\ b=2,\ c=4$

4 미지수가 2개인 연립이차방정식 풀기

(1) $\begin{cases} x-y=2 & \cdots① \\ x^2+2xy-4y^2=12 & \cdots② \end{cases}$

①의 $x=y+2$를 ②에 대입하여 정리하면

$y^2-8y+8=0 \quad \therefore y=4\pm2\sqrt{2}$

$\therefore \begin{cases} x=6+2\sqrt{2} \\ y=4+2\sqrt{2} \end{cases},\ \begin{cases} x=6-2\sqrt{2} \\ y=4-2\sqrt{2} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-2y-3=0 & \cdots① \\ xy=5 & \cdots② \end{cases}$

①의 $x=2y+3$을 ②에 대입하면

$2y^2+3y-5=0 \quad \therefore y=1,\ -\frac{5}{2}$

$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=-2 \\ y=-\dfrac{5}{2} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+xy+y^2=81 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 인수분해하면 $(x+y)(x-y)=0$

(i) $x=-y$일 때, ②에 대입하면

$y^2=81 \quad \therefore y=\pm 9$

$\therefore y=9$일 때 $x=-9$

$y=-9$일 때 $x=9$

(ii) $x=y$일 때, ②에 대입하면

$y^2=27 \quad \therefore y=\pm 3\sqrt{3}$

$\therefore y=3\sqrt{3}$일 때, $x=3\sqrt{3}$

$y=-3\sqrt{3}$일 때, $x=-3\sqrt{3}$

$\therefore \begin{cases} x=-9 \\ y=9 \end{cases}, \begin{cases} x=9 \\ y=-9 \end{cases}, \begin{cases} x=3\sqrt{3} \\ y=3\sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x=-3\sqrt{3} \\ y=-3\sqrt{3} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x^2-3xy-2y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ 2x^2+y^2=36 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①을 인수분해하면 $(2x+y)(x-2y)=0$

(i) $y=-2x$일 때, ②에 대입하면

$x^2=6 \quad \therefore x=\pm\sqrt{6}$

$\therefore x=\sqrt{6}$일 때, $y=-2\sqrt{6}$

$x=-\sqrt{6}$일 때, $y=2\sqrt{6}$

(ii) $x=2y$일 때, ②에 대입하면

$y^2=4 \quad \therefore y=\pm 2$

$\therefore y=2$일 때 $x=4$,

$y=-2$일 때 $x=-4$

$\therefore \begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=-2\sqrt{6} \end{cases}, \begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=2\sqrt{6} \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$

5 연립이차방정식의 활용

운동장의 두 변의 길이를 각각 x, y라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=130^2 & \cdots\cdots ① \\ xy=6000 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

연습 문제 B

보충

1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^3+3x^2-5x+1=0$ (2) $x^3+6x-7=0$

2 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ x-z=0 \\ x-2y+3z=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x+y=3 \end{cases}$

심화

3 다음 방정식을 풀어라.

(1) $3x^3-2x^2-2x+1=0$

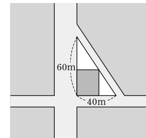
(2) $x^4+x^2+1=0$

(3) $(x^2+2x-2)(x^2+2x-5)=18$

4 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 2x+y+z=12 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+2z=5 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+2xy-4y^2=-4 \\ 3x^2+xy-2y^2=8 \end{cases}$

5 어느 회사에서 사옥을 짓기 위하여 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 모양의 부지를 매입하였다. 이 땅에 직사각형 모양의 사옥을 짓고 남은 땅은 다른 용도로 사용하려고 한다. 사옥이 들어설 땅의 넓이가 600m^2라 할 때, 이 사옥의 가로와 세로의 길이를 구하여라.



2. 여러 가지 방정식 147

①$+2\times$②를 하면

$(x+y)^2=170^2 \quad \therefore x+y=\pm 170$

따라서, 운동장 둘레의 길이는

$2(x+y)=340(\text{m})$

이다.

연습 문제 B

1 삼차방정식의 해 구하기

(1) $(x-1)(x^2+4x-1)=0$

$\therefore x=1,\ -2\pm\sqrt{5}$

(2) $(x-1)(x^2+x+7)=0$

$\therefore x=1,\ \dfrac{-1\pm 3\sqrt{3}\,i}{2}$

2 연립방정식의 해 구하기

(1) $\begin{cases} x+y+2z=4 & \cdots ① \\ x-z=0 & \cdots ② \\ x-2y+3z=2 & \cdots ③ \end{cases}$

②의 $x=z$를 ①, ③에 각각 대입하면

$3x+y=4$ ④

$4x-2y=2 \quad \therefore 2x-y=1$ ⑤

④, ⑤의 연립방정식을 풀면

$\therefore x=1,\ y=1$

$x=z$이므로 $z=1$

$\therefore x=1,\ y=1,\ z=1$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots ① \\ x+y=3 & \cdots ② \end{cases}$

②의 $y=3-x$를 ①에 대입하여 정리하면

$2x^2-6x+4=0,\ x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases},\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

3 삼 사차방정식의 해 구하기

(1) $(x-1)(3x^2+x-1)=0$

$\therefore x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$

(2) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2},\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(3) $x^2+2x=X$라 놓으면

$(X-2)(X-5)=18,\ X^2-7X-8=0$

$(X-8)(X+1)=0$

$\therefore X=8,\ -1$

(i) $X=8$일 때, $x^2+2x-8=0 \therefore x=-4,\ 2$

(ii) $X=-1$일 때, $x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0 \quad \therefore x=-1$ (중근)

(i), (ii)에서 $x=-1$ (중근), $x=-4,\ 2$

4 연립방정식의 해 구하기

(1) 세 식을 더하면

$2x+y+z=12$ ①

$x+2y+z=3$ ②

$+\ \ x+y+2z=5$ ③

$4x+4y+4z=20$

$\therefore x+y+z=5$ ④

①−④, ②−④, ③−④에서

$x=7,\ y=-2,\ z=0$

(2) $\begin{cases} x^2+2xy-4y^2=-4 & \cdots ① \\ 3x^2+xy-2y^2=8 & \cdots ② \end{cases}$

{①×2+②}÷5 를 하면 $x^2+xy-2y^2=0$

$(x+2y)(x-y)=0 \quad \therefore x=-2y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-2y$일 때, ①에 대입하면

$y^2=1 \quad \therefore y=\pm1$

따라서, $y=1$일 때, $x=-2$,

$y=-1$일 때, $x=2$

(ii) $y=x$ 일 때, ①에 대입하면

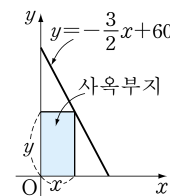
$x^2=4 \quad \therefore x=\pm2$

따라서, $x=2$일 때 $y=2$,

$x=-2$일 때 $y=-2$이다.

$\therefore \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases},\ \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases},\ \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases},\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$

5 연립일차방정식의 활용



$\begin{cases} y=-\dfrac{3}{2}x+60 & \cdots ① \\ xy=600 & \cdots ② \end{cases}$

①을 ②에 대입하여 정리하면

$x^2-40x+400=0 \quad \therefore x=20(\text{m})$

$x=20$을 ①에 대입하면 $y=30(\text{m})$

따라서, 이 사옥의 가로는 20m, 세로는 30m이다.

§1. 절대값을 포함한 일차부등식 ▶ 13차시

지도 목표

1. 부등식의 성질은 앞에서 배운 실수의 대소 관계와 같음을 이해하게 한다.
2. 절대값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있게 한다.

지도상의 유의점

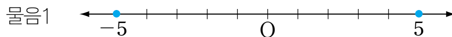
1. 부등식을 풀 때에 실수의 대소 관계가 어떻게 활용되는지 이해시키도록 한다.
2. 부등식의 양변에 음수를 곱할 때에는 부등호의 방향이 바뀌는 것에 유의하도록 지도한다.
3. 복소수의 대소는 비교하지 않으므로 부등식에서 사용되는 문자는 실수를 나타냄을 이해시킨다.
4. 절대값의 뜻을 명확히 하고, 절대값이 포함된 부등식을 풀 수 있도록 지도한다.

본문 해설

1 생각해 봅시다 ⇨ 절대값이 포함된 부등식

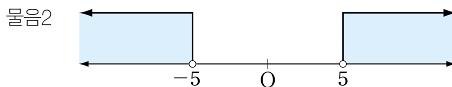
절대값의 개념을 복습하고, 절대값이 어떤 수보다 클 때와 작을 때의 값을 각각 수직선 위에 표시해 보아서 절대값이 포함된 부등식을 풀 수 있도록 지도한다.

물음1



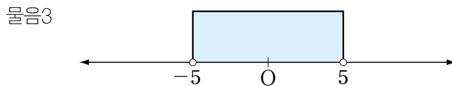
$|x|=5$

물음2



$x<-5,\ x>5$

물음3



$-5<x<5$

2 절대값이 포함된 부등식을 풀 때에는 절대값 부호를 없애는 과정에서 부등호의 방향에 유의하도록 지도한다.

3 부등식

교과서 148쪽

§1. 절대값을 포함한 일차부등식

■ 부등식의 성질을 이해하고, 절대값을 포함한 일차부등식을 풀 수 있다.

절대값을 포함한 일차부등식의 풀이

1 생각해 봅시다

수직선에서 한 부분을 표시할 때에 경계점이 포함되는지 아닌지를 편의상 다음과 같은 기호로 표시한다.
○ : 포함되지 않을 때
● : 포함될 때

다음 물음에 답하여라.

물음 1 원점으로부터의 거리가 5인 수 x의 위치를 아래의 수직선 위에 표시하고, 절대값 기호를 사용하여 나타내어라.

O

물음 2 원점으로부터의 거리가 5보다 큰 수 x가 있을 수 있는 범위를 아래의 수직선 위에 표시하고, 이를 x에 관한 부등식으로 나타내어라.

O

물음 3 원점으로부터의 거리가 5보다 작은 수 x가 있을 수 있는 범위를 아래의 수직선 위에 표시하고, 이를 x에 관한 부등식으로 나타내어라.

O

뿌리 문제 1 ⇨ 절대값이 1개 포함된 부등식의 풀이

(1) $|x+4|>2 \Longleftrightarrow x+4<-2$ 또는 $x+4>2$

$x+4<-2$일 때, $x<-6$

$x+4>2$일 때, $x>-2$

$\therefore\ x<-6$ 또는 $x>-2$

(2) $|3x-2|\leqq 4 \Longleftrightarrow -4\leqq 3x-2\leqq 4$

$-2\leqq 3x\leqq 6 \quad \therefore\ -\dfrac{2}{3}\leqq x\leqq 2$

(3) $|5x+3|\geqq 7 \Longleftrightarrow$

$5x+3\leqq -7$ 또는 $5x+3\geqq 7$

$5x+3\leqq -7$일 때, $5x\leqq -10 \quad \therefore\ x\leqq -2$

$5x+3\geqq 7$일 때, $5x\geqq 4 \quad \therefore\ x\geqq \dfrac{4}{5}$

$\therefore\ x\leqq -2$ 또는 $x\geqq \dfrac{4}{5}$

(4) $|1-2x|<5 \Longleftrightarrow -5<1-2x<5$

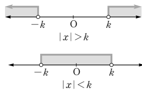
$-6<-2x<4 \quad \therefore\ -2<x<3$

2

$k>0$일 때, 절대값을 포함한 부등식에서는 다음이 성립한다.

$|x|>k \Longleftrightarrow x<-k$ 또는 $x>k$

$|x|<k \Longleftrightarrow -k<x<k$





$|x|>2 \Longleftrightarrow x<-2$ 또는 $x>2$

$|x|<2 \Longleftrightarrow -2<x<2$

복소수의 대소는 비교하지 않으므로 부등식에서 사용되는 문자는 실수를 나타낸다. 따라서, 부등식의 기본 성질은 앞에서 배운 실수의 대소 관계의 기본 성질과 같다.

예제 1

다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x-3|<2$　　(2) $|2x+1|\geqq 5$

| 풀이 |

(1) $|x-3|<2 \Longleftrightarrow -2<x-3<2$

$-2<x-3$에서　$1<x$

$x-3<2$에서　$x<5$

$\therefore 1<x<5$



(2) $|2x+1|\geqq 5$

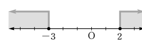
$\Longleftrightarrow 2x+1\leqq -5$ 또는 $2x+1\geqq 5$

$2x+1\leqq -5$에서　$2x\leqq -6$

$\therefore x\leqq -3$

$2x+1\geqq 5$에서　$2x\geqq 4$　$\therefore x\geqq 2$

$\therefore x\leqq -3$ 또는 $x\geqq 2$



답 (1) $1<x<5$ (2) $x\leqq -3$ 또는 $x\geqq 2$

뿌리 **문제 1** 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x+4|>2$　　(2) $|3x-2|\leqq 4$

(3) $|5x+3|\geqq 7$　　(4) $|1-2x|<5$

3 **예제 2**

부등식 $|x|+|x+2|\leqq 6$을 풀어라.

| 풀이 |

$|x|=\begin{cases} x & (x\geqq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$ 이고, $|x+2|=\begin{cases} x+2 & (x\geqq -2) \\ -x-2 & (x<-2) \end{cases}$

이므로 x와 $x+2$는 $x=0$, $x=-2$를 경계로 하여 그 전후에서 부호가 변한다. 따라서, 다음의 세 구간으로 나누어 생각해 본다.

(i) $x\leqq -2$일 때,

$|x|+|x+2|=-x-x-2=-2x-2$

따라서, 주어진 부등식은

$-2x-2\leqq 6$, $-2x\leqq 8$　$\therefore x\geqq -4$

그런데 주어진 조건이 $x\leqq -2$이므로 이 조건에 맞는 구간은

$-4\leqq x\leqq -2$　…… ①

(ii) $-2<x\leqq 0$일 때, $|x|+|x+2|=-x+x+2=2$

따라서, 이 범위에서 주어진 부등식은 $2\leqq 6$이 되어 항상 성립하므로 주어진 조건에 맞는 구간은

$-2<x\leqq 0$　…… ②

(iii) $x>0$일 때, $|x|+|x+2|=x+x+2=2x+2$

따라서, 주어진 부등식은 $2x+2\leqq 6$

$2x\leqq 4$　$\therefore x\leqq 2$

그런데 주어진 조건이 $x>0$이므로 이 조건에 맞는 구간은

$0<x\leqq 2$　…… ③

①, ②, ③으로부터 주어진 부등식의 해는

$-4\leqq x\leqq 2$

답 $-4\leqq x\leqq 2$

열매 **문제 2** 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x|+|x-5|\leqq 9$　　(2) $|2x-1|-|x-3|<8$

열매 **문제 3** 길이가 6cm, 8cm인 막대와 또다른 막대 하나를 더 사용하여 삼각형을 만들려고 한다. 이 삼각형의 각 변의 길이의 차이가 2cm 이하가 되도록 하려면 새로 사용하는 막대의 길이는 어느 범위에 있어야 하는가?

3 절대값이 2개 포함된 부등식에서는 절대값 기호 안의 부호가 변하는 x값을 모두 찾아내어 그 값으로 나누어지는 각 구간에 대하여 부등식을 풀도록 지도한다.

열매 **문제 2**　⇨ 절대값이 2개 포함된 부등식의 풀이

(1) (i) $x\leqq 0$일 때,

$|x|+|x-5|=-x-(x-5)\leqq 9$

$-2x\leqq 4$　$\therefore x\geqq -2$

따라서, 주어진 조건에 맞는 구간은

$-2\leqq x\leqq 0$

(ii) $0<x\leqq 5$일 때,

$|x|+|x-5|=x-(x-5)\leqq 9$

$5\leqq 9$가 참이므로 항상 성립

따라서, 주어진 조건에 맞는 구간은

$0<x\leqq 5$

(iii) $x>5$일 때, $|x|+|x-5|=x+x-5\leqq 9$

$2x\leqq 14$　$\therefore x\leqq 7$

따라서, 주어진 조건에 맞는 구간은

$5<x\leqq 7$

(i), (ii), (iii)으로부터 $-2\leqq x\leqq 7$

(2) (i) $x\leqq \dfrac{1}{2}$일 때,

$|2x-1|-|x-3|$

$=-2x+1+x-3<8$

$=-x<10$　$\therefore x>-10$

따라서, 주어진 조건에 맞는 구간은

$-10<x\leqq \dfrac{1}{2}$

(ii) $\dfrac{1}{2}<x\leqq 3$일 때,

$|2x-1|-|x-3|=2x-1+x-3<8$

$3x<12$　$\therefore x<4$

따라서, 주어진 조건에 맞는 구간은

$\dfrac{1}{2}<x\leqq 3$

(iii) $x>3$일 때

$$|2x-1|-|x-3|=2x-1-x+3<8$$

$$\therefore x<6$$

주어진 조건에 맞는 구간은 $3<x<6$

(i), (ii), (iii)으로부터 $-10<x<6$



절대값이 포함된 부등식의 응용

새로 사용하는 막대의 길이를 $x$cm라 하면 삼각형의 두 변의 길이의 합은 다른 한 변의 길이보다 커야 하므로

$$x+6>8,\ x+8>6,\ 6+8>x$$

$$\therefore 2<x<14 \quad ①$$

한편, 삼각형의 각 변의 길이의 차가 2cm 이하가 되어야 하므로

$$\begin{cases} |x-6|\leqq 2 \\ |x-8|\leqq 2 \end{cases}$$

(i) $|x-6|\leqq 2$일 때, $-2\leqq x-6\leqq 2$

$$\therefore 4\leqq x\leqq 8 \quad ②$$

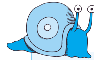
(ii) $|x-8|\leqq 2$일 때, $-2\leqq x-8\leqq 2$

$$\therefore 6\leqq x\leqq 10 \quad ③$$

①, ②, ③을 동시에 만족하는 값은

$$6\leqq x\leqq 8$$

따라서, 새로 사용하는 막대의 길이는 6cm 이상 8cm 이하가 되어야 한다.



참고 자료 역사 속의 연립이차방정식

조선 시대의 수학은 중인 계급에 속한 산학사들에 의하여 연구되었다. 이들은 산학의 공인 시험(과거)의 합격자들인데, 연산군 이후 조선 시대 말까지 무려 1400여 명의 합격자 명단이 기록으로 남아 있다.

산학자 홍정하(洪正夏, 1684~?)의 유명한 일화를 살펴보자.

당시 중국은 문화의 종주국임을 자랑하며 일류 학자를 주변 각 국에 파견하곤 하였는데 1713년에 중국에서 파견된 하국주(何國柱)를 조선의 산학자인 홍정하와 유수석이 만나서 대화를 나눈 것이 홍정하의 '구일집(九一集)'에 기록되어 있다. 그 중에 연립이차방정식과 관련된 것을 소개하면 다음과 같다.

> 대소 두 개의 정사각형이 있다. 그 넓이의 합은 468제곱자이고, 큰 정사각형의 한 변의 길이는 작은 정사각형의 한 변의 길이보다 6자 만큼 길다고 한다. 두 정사각형의 각 한 변의 길이는 얼마인가?

위의 문제는 중국의 사신 하국주가 낸 문제인데 우리 나라의 산학자들이 제대로 답을 하자 중국의 사신들이 많이 놀랐다고 한다.

이 외에도 방정식에 관련된 문제를 여러 개 내었는데, 우리 나라 산학자들이 산목(算木)계산을 통하여 쉽게 답을 내었다.

하국주는 당시 중국에는 이런 것이 없다고 하며 산목 40여 개를 받아서 돌아갔다고 한다.



형성 평가

1 (기본) 다음 부등식을 풀어라.

$$3|x+1|-2|x-1|>6$$

답 : $x<-11$ 또는 $x>1$

2 (보충) 다음 부등식을 풀어라

$$|2x-5|<3$$

답 : $1<x<4$

3 (심화) 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} |x-3|<6 \\ |x-3|>|x-1| \end{cases}$$

답 : $-3<x<2$

§2. 이차부등식

▶ 14~17 차시

지도 목표

1. 이차부등식의 뜻을 이해하고, 이차부등식의 해를 구할 수 있게 한다.
2. 연립이차부등식을 풀 수 있게 한다.
3. 이차부등식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. $ax^2+bx+c>0$와 같은 이차부등식을 풀 때는 먼저 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 이용하여 근을 판별하도록 한다.
2. 이차부등식에서 x^2의 계수가 음수일 때에는 x^2의 계수를 양수로 만든 후에 풀도록 지도한다. 이 때, 부등호의 방향이 바뀌는 것에 유의하도록 지도한다.
3. 연립이차부등식을 풀 때에는 각 부등식을 풀어서 공통부분을 구하도록 하고, 삼차 이상의 부등식은 다루지 않는다.

본문 해설



$D>0$일 때의 이차부등식의 풀이

이차방정식의 근을 경계로 하여 변화하는 이차식의 값을 살펴보아서 이차부등식의 풀이를 이해하도록 지도한다.

주어진 표의 빈 칸을 채우면 다음과 같다.

x의 범위	$x<1$	$x=1$	$1<x<4$	$x=4$	$4<x$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

물음1 $x=1,\ 4$

물음2 $x<1$ 또는 $x>4$

물음3 $1<x<4$

물음4 $x<1$일 때는 양수, $x=1$일 때는 0, $1<x<4$일 때는 음수, $x=4$일 때는 0, $x>4$일 때는 양수이다.

---

§2. 이차부등식

- 이차부등식의 뜻을 알고, 이차부등식을 풀 수 있다.
- 연립이차부등식을 풀 수 있다.

$D>0$ 일 때의 이차부등식의 풀이

생각해 봅시다



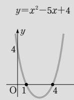
x에 관한 이차식 $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$의 부호를 알아보기 위해 만든 다음 표의 빈 칸을 알맞게 채우고 물음에 답하여라.

x의 범위	$x<1$	$x=1$	$1<x<4$	$x=4$	$4<x$
$x-1$	$-$	0			
$x-4$	$-$				
$(x-1)(x-4)$	$+$				

물음 1 위의 표에 있는 x의 범위에서 $x^2-5x+4=0$이 되는 x의 값을 말하여라.

물음 2 위의 표에 있는 x의 범위에서 $x^2-5x+4>0$이 되는 x의 값의 범위를 구하여라.

물음 3 위의 표에 있는 x의 범위에서 $x^2-5x+4<0$이 되는 x의 값의 범위를 구하여라.



물음 4 x의 값이 변함에 따라 이차식 x^2-5x+4의 부호는 어떻게 변하겠는가? 물음 1, 2, 3의 결과와 왼쪽의 그래프를 보고 이야기해 보아라.

3. 부등식 151

뿌리 문제 1

$D>0$일 때의 이차부등식의 풀이

(1) $x^2-9x+14=(x-2)(x-7)>0$

$\therefore\ x<2$ 또는 $x>7$

(2) $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)<0$

$\therefore\ -1<x<3$

(3) $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)\geq 0$

$\therefore\ x\leq 1$ 또는 $x\geq 5$

(4) $-x^2-x+6=-(x+3)(x-2)\geq 0$

$\therefore\ -3\leq x\leq 2$

줄기 문제 2

$D>0$일 때의 이차부등식의 풀이

(1) $x^2-7x+3=0$의 근은

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}$$

$$=\frac{7\pm\sqrt{37}}{2}$$

2 부등식의 모든 항을 좌변으로 이항하였을 때,

$$ax^2+bx+c>0, \quad ax^2+bx+c<0$$
$$ax^2+bx+c\geqq 0, \quad ax^2+bx+c\leqq 0 \ (\text{단, } a\neq 0)$$

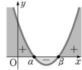
와 같이 좌변이 x에 관한 이차식이 될 때, 이 부등식을 x에 관한 **이차부등식**이라 한다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$에서 $D=b^2-4ac>0$이면 서로 다른 두 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$를 가진다. 이 때, 이차식 ax^2+bx+c는

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

와 같이 인수분해되므로, $a>0$이면 ax^2+bx+c의 부호는 $(x-\alpha)(x-\beta)$의 부호와 같아진다. 여기서 x의 범위에 따른 $(x-\alpha)(x-\beta)$의 부호는 다음 표와 같다.

$y=ax^2+bx+c$의 그래프 $(a>0)$



x의 범위	$x<\alpha$	$x=\alpha$	$\alpha<x<\beta$	$x=\beta$	$\beta<x$
$x-\alpha$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-\beta$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-\alpha)(x-\beta)$	$+$	0	$-$	0	$+$



따라서, $a>0$이고 $D=b^2-4ac>0$일 때, 이차부등식의 해는 다음과 같다.

이차부등식의 해 (1)

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a>0)$이 서로 다른 두 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$를 가지면

❶ $ax^2+bx+c>0$의 해는 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$
❷ $ax^2+bx+c<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$
❸ $ax^2+bx+c\geqq 0$의 해는 $x\leqq\alpha$ 또는 $x\geqq\beta$
❹ $ax^2+bx+c\leqq 0$의 해는 $\alpha\leqq x\leqq\beta$

152 Ⅱ. 방정식과 부등식

예제 1 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2-3x+2>0$ (2) $-x^2+4x-1\geqq 0$

| 풀이 | (1) 좌변을 인수분해하면 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$

따라서, 구하는 해는 $x<1$ 또는 $x>2$이다.

최고차 항의 계수가 양이 되도록 고친 후에 푼다.

(2) 양변에 -1을 곱하면 $x^2-4x+1\leqq 0$

방정식 $x^2-4x+1=0$의 해를 구하여 좌변을 인수분해하면

$$x^2-4x+1=\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\}\leqq 0$$

따라서, 구하는 해는 $2-\sqrt{3}\leqq x\leqq 2+\sqrt{3}$이다.

답 (1) $x<1$ 또는 $x>2$ (2) $2-\sqrt{3}\leqq x\leqq 2+\sqrt{3}$

뿌리 **문제 1** 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2-9x+14>0$ (2) $x^2-2x-3<0$
(3) $x^2-6x+5\geqq 0$ (4) $-x^2-x+6\geqq 0$

줄기 **문제 2** 다음 이차부등식을 풀어라.

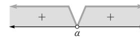
(1) $x^2-7x+3\leqq 0$ (2) $-2x^2+5x-1>0$

3 **$D=0$일 때의 이차부등식의 해**

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$에서 $D=b^2-4ac=0$이면 중근 α를 가지므로 이차식 ax^2+bx+c는

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$$

과 같이 인수분해된다.



여기서, $a>0$이라 할 때,

$x=\alpha$이면 $a(x-\alpha)^2=0$
$x\neq\alpha$이면 $a(x-\alpha)^2>0$

이 되므로, 이것을 이용하면 다음 결과를 얻는다.

3. 부등식 153

$$\therefore \frac{7-\sqrt{37}}{2}\leqq x\leqq\frac{7+\sqrt{37}}{2}$$

(2) $-2x^2+5x-1>0$에서 $2x^2-5x+1<0$

$2x^2-5x+1=0$의 근은

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}$$
$$=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$$
$$\therefore \frac{5-\sqrt{17}}{4}<x<\frac{5+\sqrt{17}}{4}$$

3 $D=0$일 때에는 이차방정식이 중근을 가지므로 이차함수의 그래프는 x축과 접하면서 x축의 어느 한 쪽에 있다. 이것을 이용하여 이차부등식의 풀이를 이해하도록 한다.

뿌리 **문제 3** ⇨ $D=0$일 때의 이차부등식의 풀이

(1) $x^2-8x+16=(x-4)^2<0$

그런데 $(x-4)^2\geqq 0$이므로 부등식의 해는 없다.

(2) $-x^2+2x-1=-(x-1)^2\leqq 0$

$(x-1)^2\geqq 0$이므로 해는 모든 실수이다.

(3) $x^2+9\leqq 6x$, $x^2-6x+9\leqq 0$

$(x-3)^2\leqq 0$

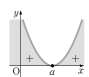
이므로 부등식의 해는 $x=3$이다.

(4) $4x^2+16x+25>-4x$

$4x^2+20x+25=(2x+5)^2>0$

따라서, 부등식의 해는 $x=-\dfrac{5}{2}$를 제외한 모든 실수이다.

4 $D<0$일 때에는 이차방정식이 실근을 가지지 않으므로 이 이차함수의 그래프는 x축의 어느 한 쪽에 있게 된다. 이를 이용하여 이차부등식의 풀이를 이해하도록 지도한다.



이차부등식의 해 (2)

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a>0)$이 중근 α를 가지면

❶ $ax^2+bx+c>0$ 의 해는 $x\neq\alpha$ 인 모든 실수

❷ $ax^2+bx+c<0$ 의 해는 없다.

❸ $ax^2+bx+c\geq0$ 의 해는 모든 실수

❹ $ax^2+bx+c\leq0$ 의 해는 $x=\alpha$

예제 2 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2+6x+9>0$ (2) $x^2-4x+4<0$

| 풀이 | (1) 좌변을 인수분해하면 $x^2+6x+9=(x+3)^2>0$이므로

이 부등식은 $x\neq-3$인 모든 실수에서 성립한다.

(2) 좌변을 인수분해하면 $x^2-4x+4=(x-2)^2<0$이므로

이 식을 만족하는 실수값은 없다.

답 (1) $x\neq-3$인 모든 실수 (2) 해는 없다.

뿌리 **문제 3** 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2-8x+16<0$ (2) $-x^2+2x-1\leq0$

(3) $x^2+9\leq6x$ (4) $4x^2+16x+25>-4x$

$D<0$일 때의 이차부등식의 해

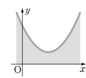
4 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq0)$에서 $D=b^2-4ac<0$이면 서로 다른 두 허근을 가진다. 이 때, $a>0$이면

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-D}{4a}>0$$

154 Ⅳ. 방정식과 부등식

이므로, x의 모든 값에 대하여 $ax^2+bx+c>0$이다.

이로부터 다음 결과를 얻는다.



이차부등식의 해 (3)

이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a>0)$이 서로 다른 두 허근을 가지면

❶ $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\geq0$의 해는 모든 실수

❷ $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\leq0$의 해는 없다.

예제 3 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2+4x+5\leq0$ (2) $x^2+2x+3>0$

| 풀이 | (1) 이차방정식 $x^2+4x+5=0$에서 x^2의 계수가 양수이고

$$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot5=-1<0$$

이므로, 부등식

$$x^2+4x+5\leq0$$

을 만족하는 실수해는 없다.

(2) 이차방정식 $x^2+2x+3=0$에서 x^2의 계수가 양수이고

$$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot3=-2<0$$

이므로, 부등식

$$x^2+2x+3>0$$

은 모든 실수에 대하여 성립한다.

| 다른 풀이 | (2) $x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$이므로 이 부등식은 모든 실수에 대하여 성립한다.

답 (1) 해는 없다. (2) 모든 실수

줄기 **문제 4** 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2-4x+10>0$ (2) $x^2-2x+3<0$

줄기 **문제 5** 이차부등식 $x^2+4x+(a+1)>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 a의 값의 범위를 정하여라.

3. 부등식 155

줄기 문제 4 ⇨ $D<0$일 때의 이차부등식의 풀이

(1) $x^2-4x+10=(x-2)^2+6\geq0$이므로

$x^2-4x+10>0$의 해는 모든 실수이다.

(2) $x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geq0$이므로

$x^2-2x+3<0$의 해는 없다.

줄기 문제 5 ⇨ 이차부등식의 응용

$y=x^2+4x+(a+1)>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이 이차함수의 그래프가 x축과 접하지 않으면서 x축의 위쪽에 있어야 한다. 즉, $x^2+4x+(a+1)=0$의 해는 허근이어야 하므로

$$D=16-4(a+1)<0 \quad \therefore\ a>3$$

5 연립이차부등식을 풀 때에는 각 부등식의 해를 구하여 그들의 공통부분을 구하도록 지도한다.

뿌리 문제 6 ⇨ 연립이차부등식의 풀이

(1) (ⅰ) $x+3\leq2x \quad \therefore\ x\geq3$

(ⅱ) $x^2-3x-10=(x-5)(x+2)\leq0$

$\therefore\ -2\leq x\leq5$

(ⅰ)과 (ⅱ)에서 공통인 부분을 찾으면

$3\leq x\leq5$

(2) (ⅰ) $x+5\geq3(x+2) \quad \therefore\ x\leq-\frac{1}{2}$

(ⅱ) $x^2+x-2=(x-1)(x+2)<0$

$\therefore\ -2<x<1$

(ⅰ)과 (ⅱ)에서 공통인 부분을 찾으면

$-2<x\leq-\frac{1}{2}$

(3) (ⅰ) $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$

$\therefore\ x<1$ 또는 $x>2$

(ⅱ) $2x^2-x-10=(2x-5)(x+2)\leq0$

5 연립일차부등식의 풀이와 마찬가지로 연립이차부등식을 풀 때에는 각 부등식을 풀어서 이들의 공통 부분을 구하면 된다.

예제 4

연립부등식 $\begin{cases} x^2-4x+3>0 & \cdots\cdots ① \\ 2x^2-9x-5\leq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 을 풀어라.

| 풀이 | 부등식 ①을 풀면

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)>0$$

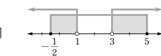
$$\therefore x<1 \text{ 또는 } x>3 \quad \cdots\cdots ③$$

부등식 ②를 풀면

$$2x^2-9x-5=(2x+1)(x-5)\leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2}\leq x\leq 5 \quad \cdots\cdots ④$$

따라서, 구하는 연립부등식의 해는 ③과 ④를 동시에 만족시키는 다음의 x의 값이 된다.



$$-\frac{1}{2}\leq x<1 \text{ 또는 } 3<x\leq 5$$

답 $-\frac{1}{2}\leq x<1$ 또는 $3<x\leq 5$

뿌리 문제 6 다음 연립부등식을 풀어라.

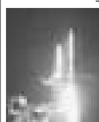
(1) $\begin{cases} x+3\leq 2x \\ x^2-3x-10\leq 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+5\geq 3(x+2) \\ x^2+x-2<0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ 2x^2-10\leq x \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x^2+2x-3\leq 0 \\ -2x^2+7x+15\leq 0 \end{cases}$

열매 문제 7 x에 관한 두 이차방정식 $4x^2-kx+1=0$과 $x^2+2kx-4k+5=0$이 동시에 실근을 가지도록 k값의 범위를 구하여라.

심화 과정 이차부등식을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있다.

예제 1 지상에서 v_0의 속도로 수직으로 쏘아 올린 물체의 t초 후의 높이 h는 다음과 같은 식으로 주어진다.



$$h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2 (\text{단, } g=9.8\text{m/sec}^2\text{은 중력 가속도}) \quad \cdots\cdots ①$$

준호가 과학 실험에서 물로켓을 초속 20m로 지상에서 수직으로 쏘아 올렸다. 물로켓이 10m 이상의 높이에 있게 되는 것은 몇 초 동안인가? (단, 소수 첫째 자리까지 구하여라.)

지구 궤도를 벗어나기 위해서는 공기 저항을 무시하였을 때, 초기 속도가 $v_0>\sqrt{2gR}\fallingdotseq 11.2$km/sec 이어야 한다. 단, R는 지구의 반지름의 길이이고 초기 속도는 초속 11.2km 보다 커야 한다.

| 풀이 | ①의 식에 $v_0=20$, $g=9.8$을 대입하면 물로켓의 높이 h는 다음과 같다.

$$h=20t-4.9t^2$$

$h\geq 10$이므로 구하는 부등식은

$$20t-4.9t^2\geq 10$$

$$4.9t^2-20t+10\leq 0 \quad \cdots\cdots ②$$

이다.

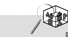
방정식 $4.9t^2-20t+10=0$은 서로 다른 두 실근 $\frac{100\pm 10\sqrt{51}}{49}$을 가진다.

따라서, ②에서 구하는 t의 범위는

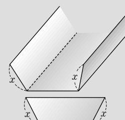
$$\frac{100-10\sqrt{51}}{49}\leq t\leq \frac{100+10\sqrt{51}}{49}$$

이므로 $\frac{100+10\sqrt{51}}{49}-\frac{100-10\sqrt{51}}{49}=\frac{20\sqrt{51}}{49}\fallingdotseq 2.9$(초)

답 약 2.9초



문제 1 철민이는 폭이 30cm인 긴 양철판을 구부려 단면이 오른쪽 그림과 같은 사다리꼴 모양의 물받이 홈통을 만들려고 한다.
이 때, 옆면의 폭은 $x$cm이고, 단면의 윗부분의 폭은 아랫부분의 폭보다 옆면의 폭만큼 길다고 한다.
단면의 넓이가 $30\sqrt{3}$cm^2 이하가 되도록 하려면 x의 범위를 얼마로 해야 하는가? (단, $x\geq 1$이다.)



$$\therefore -2\leq x\leq \frac{5}{2}$$

(i)과 (ii)에서 공통인 부분을 찾으면

$$-2\leq x<1 \text{ 또는 } 2<x\leq \frac{5}{2}$$

(4) (i) $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)\leq 0$

$$\therefore -3\leq x\leq 1$$

(ii) $-2x^2+7x+15=-(2x+3)(x-5)\leq 0$

$$\therefore x\leq -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x\geq 5$$

(i)과 (ii)에서 공통인 부분을 찾으면

$$-3\leq x\leq -\frac{3}{2}$$



열매 문제 7 연립이차부등식의 응용

두 방정식 모두 $D\geq 0$이어야 하므로

(i) $k^2-16\geq 0$ $\therefore k\leq -4$ 또는 $k\geq 4$

(ii) $k^2+4k-5\geq 0$ $\therefore k\leq -5$ 또는 $k\geq 1$

(i)과 (ii)에서 공통인 부분을 찾으면

$$k\leq -5 \text{ 또는 } k\geq 4$$

심화 과정



문제 1 이차부등식의 활용

이 사다리꼴의 높이 h는 피타고라스의 정리에 의하여

$\frac{\sqrt{3}}{2}x$cm가 되므로

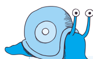
$\frac{1}{2}\{(30-2x)+(30-2x+x)\}\times\frac{\sqrt{3}}{2}x\leq 30\sqrt{3}$

이 부등식을 풀면

$$x\geq 10+2\sqrt{15} \text{ 또는 } x\leq 10-2\sqrt{15}$$

그런데 $x\geq 1$이고, $30-2x\geq 0$에서 $x\leq 15$이므로

$$1\leq x\leq 10-2\sqrt{15}$$



참고 자료 바빌로니아의 대수

바빌로니아에서는 60진법을 사용하고 있었다.

예를 들어, $123=60\times2+3$이므로 60진법으로 2, 3과 같이 썼던 것이다.

또한, $2.5=2+\frac{30}{60}$이므로 '; '의 기호를 사용하여 2 ; 30과 같이 나타냈다.

바빌로니아에서 발견된 점토판에는 다음과 같은 방정식 문제와 풀이, 답이 적혀 있다.

> 길이, 폭, 길이와 폭을 곱해서 면을 만들었다. 다시 길이의 폭을 넘는 부분을 면에 덧붙였다. 3, 3
> 다시 길이와 폭을 덧붙였다. 27
> 길이, 폭, 면은 얼마인가?
> 27 3, 3 합
> 15 길이, 3 면
> 12 폭

(현대식 풀이) 길이를 x, 폭을 y라 하면 면은 xy이고, 길이의 폭을 넘는 부분은 $x-y$이다.

또한, 60진법의 3, 3은 $60\times3+3=183$이므로 주어진 조건을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{cases} xy+(x-y)=183 & \text{①} \\ x+y=27 & \text{②} \end{cases}$$

②의 $y=27-x$를 ①에 대입하면

$$x(27-x)+x-(27-x)=183$$
$$x^2-29x+210=0$$
$$(x-14)(x-15)=0$$
$$\therefore x=14, 15$$

$x=14$일 때, $y=13$이고

$xy=182=3\times60+2(=3, 2)$

$x=15$일 때, $y=12$이고

$xy=180=3\times60+0(=3, 0)$

이다. 따라서

$$\begin{cases} \text{길이} : 14 \\ \text{폭} : 13 \\ \text{면} : 3, 2(=182) \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{길이} : 15 \\ \text{폭} : 12 \\ \text{면} : 3, 0(=180) \end{cases}$$

이다. 그런데 점토판의 답은 두 번째 것만 적었고, 당시에는 0이 없었기 때문에 면을 3으로만 표기한 것이다.

참고 재미있는 수학 게임(1997), 편집부/편, 예문당



형성 평가

1 기본 부등식 $-3x^2+5x-2\leq0$ 을 풀어라.

답 : $x\geq1$ 또는 $x\leq\frac{2}{3}$

2 보충 부등식 $x^2-8x+15<0$ 을 풀어라

답 : $3<x<5$

3 심화 다음 연립부등식 $\begin{cases} x^2+x-1<0 \\ -2x^2+3x+2\leq0 \end{cases}$ 을 풀어라.

답 : $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<x\leq-\frac{1}{2}$

§3. 부등식의 증명

▶ 18~19차시

지도 목표

1. 부등식의 여러 가지 성질을 이용하여 절대부등식을 증명할 수 있게 한다.
2. 산술평균, 기하평균, 조화평균 사이의 대소 관계를 이해하고, 이를 활용하여 부등식 문제를 해결할 수 있게 한다.

지도상의 유의점

1. 부등식 $A>B$를 증명하는 것은 $A-B>0$을 증명하는 것과 같다는 것을 이해시키도록 한다.
2. A^2은 항상 0보다 크거나 같다는 것을 이해시키고, $A\geqq 0$와 같은 형태의 부등식을 증명할 때에는 주어진 부등식을 완전제곱식으로 나타내거나, B^2+C^2의 형태로 변형시켜서 그 값이 음이 아님을 증명할 수 있도록 지도한다.
3. $A>0$, $B>0$일 때에는

$$A>B \Leftrightarrow A^2>B^2$$

임을 이해시키고, 이를 부등식의 증명에 이용할 수 있도록 지도한다.

4. 산술평균, 기하평균, 조화평균 사이의 대소 관계를 부등식의 활용에 이용할 수 있도록 지도한다.

본문 해설

1 생각해 봅시다 — 절대부등식의 뜻 이해

여러 가지 부등식의 해를 구해 보고, 부등식의 해가 모든 실수인 경우를 살펴본다.

물음1 (3)

물음2 (2)

물음3 문자 x에 어떤 실수를 대입해도 그 부등식이 항상 성립한다는 뜻이다.

2 절대부등식의 뜻을 이해하고, 부등식을 증명하는 데 필요한 실수의 대소 관계를 이해하며, 이를 증명에 활용할 수 있도록 지도한다.

158 교과서

§3. 부등식의 증명

■ 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

부등식의 증명

1 생각해 봅시다

다음 부등식의 해를 구하고, 물음에 답하여라.

(1) $x+1>4$	(2) $x^2\geqq 0$
(3) $x^2-2x+3<0$	(4) $x^2+2x+1>0$

물음 1 해가 존재하지 않는 부등식은 어느 것인가?

물음 2 해가 모든 실수인 부등식은 어느 것인가?

물음 3 위의 물음 2에서 해가 모든 실수라는 것은 무엇을 의미하는지 이야기해 보아라.

2 부등식 $x>3$은 $x=1$이면 성립하지 않지만, $x=4$이면 성립한다. 그러나 부등식 $x^2+1>0$은 x에 어떠한 실수를 대입하여도 이 부등식은 성립한다. 이와 같이 부등식의 문자에 어떠한 실수를 대입하여도 항상 성립하는 부등식을 **절대부등식**이라 한다.

부등식을 증명할 때에는 다음과 같은 실수의 대소 관계에 관한 성질이 자주 사용된다.

부등식의 증명에 이용되는 실수의 성질

a, b가 임의의 실수일 때,

❶ $a>b \Leftrightarrow a-b>0$ ❷ $a^2\geqq 0$, $a^2+b^2\geqq 0$

❸ $a>0$, $b>0$ 일 때, $a>b \Leftrightarrow a^2>b^2$

158 Ⅳ. 방정식과 부등식

뿌리 문제 1 — 절대부등식의 증명

(1) $$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2-\frac{1}{4}b^2+b^2$$

$$=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geqq 0$$

이 때, 등호는 $a=b=0$일 때에만 성립한다.

(2) $$\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{2a^2+2b^2}{4}-\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right)$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\geqq 0$$

$$\therefore \frac{a^2+b^2}{2}\geqq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

이 때, 등호는 $a=b$일 때에만 성립한다.

줄기 문제 2

부등식의 증명

완전제곱식으로 만들기 위하여 부등식의 양변에 2를 곱한 후 빼어본다.

$$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$$
$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqq 0$$
$$\therefore\ 2(a^2+b^2+c^2)\geqq 2(ab+bc+ca)$$
$$\therefore\ a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$$

이 때, 등호는 $a=b=c$일 때에만 성립한다.

3 산술평균, 기하평균, 조화평균의 대소 관계를 이해시키고, 이를 부등식의 증명에 활용할 수 있도록 지도한다.

줄기 문제 3

부등식의 증명

(1) 방법1

산술평균과 기하평균의 대소 관계를 이용한다. 즉,

$$\frac{a+\frac{1}{a}}{2}\geqq\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=1\qquad\therefore\ a+\frac{1}{a}\geqq 2$$

방법2

$$a+\frac{1}{a}-2=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geqq 0$$
$$\therefore\ a+\frac{1}{a}\geqq 2$$

방법3

양변을 제곱하여 크기를 비교해 본다.

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2^2=a^2+2+\left(\frac{1}{a}\right)^2-4$$
$$=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\geqq 0$$
$$\therefore\ a+\frac{1}{a}\geqq 2\ (\text{단, 등호는 } a=1\text{일 때 성립})$$

(2) 방법1

산술평균과 기하평균의 대소 관계를 이용한다. 즉,

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}\geqq\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=1\qquad\therefore\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2$$

159 교과서

예제 1 a, b가 실수일 때, 부등식 $a^2+b^2\geqq ab$가 성립함을 증명하여라. 또, 등호는 $a=b=0$일 때에만 성립함을 보여라.

- $a\geqq b \iff a-b\geqq 0$
- $a^2+b^2=0$ $\iff a=0,\ b=0$

| 증명 | $(a^2+b^2)-ab=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

a, b는 실수이므로 $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2\geqq 0$, $\frac{3}{4}b^2\geqq 0$

따라서, $(a^2+b^2)-ab=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geqq 0$, 즉 $a^2+b^2\geqq ab$이다.

이 때, 등호는 $a-\frac{b}{2}=0$, $b=0$ 즉, $a=b=0$일 때에만 성립한다.

뿌리 문제 1 a, b가 실수일 때 다음 부등식을 증명하여라. 또, 등호가 성립하는 것은 어떤 경우인가?

(1) $a^2+ab+b^2\geqq 0$　　(2) $\frac{a^2+b^2}{2}\geqq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

줄기 문제 2 부등식 $a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$를 증명하여라.

3 **예제 2** $a>0$, $b>0$일 때, 부등식 $\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$가 성립함을 증명하여라. 또, 등호는 $a=b$일 때에만 성립함을 보여라.

| 증명 |
$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$$
$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqq 0$$
$$\therefore\ \frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

이 때, 등호는 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, 즉 $a=b$일 때에만 성립한다.

3. 부등식 159

방법2

양변을 제곱하여 그 차를 계산해 본다.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-2^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2+2-4$$
$$=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2\geqq 0\qquad\therefore\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqq 2$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

줄기 문제 4

기하평균과 조화평균의 대소 관계

근호가 포함되어 있으므로 양변을 제곱하여 두 값의 차를 계산해 본다.

$$(\sqrt{ab})^2-\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2=ab-\frac{4a^2b^2}{a^2+2ab+b^2}$$
$$=ab\left(1-\frac{4ab}{a^2+2ab+b^2}\right)=ab\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

그런데, 가정에서 $a>0$, $b>0$이므로

$$ab\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\geqq\qquad\therefore\ (\sqrt{ab})^2\geqq\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2$$

160 교과서

줄기 문제 3 $a>0$, $b>0$일 때, 다음을 증명하여라.

(1) $a+\frac{1}{a}\geq 2$　　　(2) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

줄기 문제 4 $a>0$, $b>0$일 때, $\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$임을 증명하여라. 또, 등호가 성립하는 것은 어떤 경우인가?

| 참고 | $a>0$, $b>0$일 때, $\frac{a+b}{2}$를 a와 b의 산술평균, $\sqrt{ab}$를 기하평균, $\frac{2ab}{a+b}$를 조화평균이라 한다.

예제 3 $a\geq 0$, $b\geq 0$일 때, $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$임을 증명하여라.

| 증명 | $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2=(a+2\sqrt{ab}+b)-(a+b)$

$=2\sqrt{ab}\geq 0$

$\therefore\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\geq(\sqrt{a+b})^2$

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b}\geq\sqrt{a+b}$

단, 등호는 $a=0$ 또는 $b=0$일 때에만 성립한다.

$a>0$, $b>0$일 때
$a>b \Leftrightarrow a^2>b^2$

열매 문제 5 $\sqrt{a^2+b^2}\leq|a|+|b|$를 증명하여라.

기하평균과 조화평균

기하평균(geometric mean) 변량 사이의 비의 평균을 나타내는 경우에 사용한다. 예를 들어, 어떤 물건의 가격이 10년 동안 2배 오르고, 그 이후 10년 동안 다시 8배 올랐다면, 이 물건의 가격은 평균 10년 동안 4배씩 오른 셈이다.

조화평균(harmonic mean) 일정량의 제품을 완성하려는 데 필요한 시간의 평균을 구하는 경우나 일정 금액을 가지고 구입할 수 있는 상품 수량의 평균을 구하는 경우, 전기 저항의 병렬 연결 등에서 사용된다. 예를 들어, 10Ω과 40Ω의 저항을 병렬로 연결하면 평균 저항은 8Ω이다.

160 Ⅳ. 방정식과 부등식

따라서, $\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$이다.

단, 등호는 $a=b$일 때에만 성립한다.

열매 문제 5　　　　부등식의 증명

이 부등식은 a, b의 부호에 따라서 다음과 같은 네 가지 경우에 대하여 증명하여야 한다.

(ⅰ) $a\geq 0$, $b\geq 0$일 때, $\sqrt{a^2+b^2}\leq a+b$를 증명하면

$(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$

가정에서 $a\geq 0$, $b\geq 0$이므로 $2ab\geq 0$

$\therefore\ \sqrt{a^2+b^2}\leq a+b$

(ⅱ) $a\geq 0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a^2+b^2}\leq a-b$를 증명하면

$(a-b)^2-(a^2+b^2)=-2ab\geq 0$

(ⅲ) $a<0$, $b\geq 0$일 때, $\sqrt{a^2+b^2}\leq -a+b$를 증명하면

$(-a+b)^2-(a^2+b^2)=-2ab\geq 0$

(ⅳ) $a<0$, $b<0$일 때, $\sqrt{a^2+b^2}\leq -a-b$를 증명하면

$(-a-b)^2-(a^2+b^2)=2ab>0$

따라서, 모든 a, b에 대하여

$\sqrt{a^2+b^2}\leq|a|+|b|$



형성 평가

기본 1 다음 부등식을 증명하여라.

$$a+\frac{1}{a}>\sqrt{1+a}$$

답 : 양변을 제곱하여 빼면

$a^2-a+1+\frac{1}{a^2}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}+\frac{1}{a^2}>0$

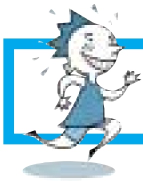
$\therefore\ a+\frac{1}{a}>\sqrt{1+a}$

보충 2 $a>b$일 때, 다음 부등식 $5a+3b>2a+6b$를 증명하여라.

답 : 부등식의 좌변에서 우변을 빼서 $a-b>0$을 이용한다.

심화 3 $a>0$, $b>0$일 때, $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 최소값을 구하여라.

답 : 4



탐구하는 수학 ▶ 20차시

문제 해결력 향상을 위한 과제

교과서 161쪽

탐구하는 수학 | 문제 해결력 향상을 위한 과제

1 오류 분석

다음은 경수가 이차부등식을 풀이한 것이다. 틀린 곳을 모두 찾아 번호를 쓰고 바르게 고쳐라.

(1) $-x^2+4x-3>0$ ①
$x^2-4x+3>0$ ②
$(x-3)(x-1)>0$ ③
$\therefore x<1,\ x>3$

(2) $x^2-4>0$ ①
$x^2>4$ ②
$\therefore x>\pm 2$

2 창의력 · 문제 해결력

부등식 $|a|+|b|\geq|a+b|$를 증명하여라.

(1) 좌변과 우변을 각각 제곱하여 적어 보아라.

(2) $|k|^2=k^2$이 되는가?

(3) $|xy|$와 $|x||y|$의 값을 x, y가 각각 양수, 0, 음수일 때로 나누어 비교해 보아라. 두 식은 서로 같은가?

(4) 위의 (2)와 (3)의 결과를 (1)의 계산에 대입해 보아라. 어느 것이 더 큰가?

(5) $|a|+|b|$와 $|a+b|$의 크기를 비교해 보아라.

3. 부등식 161

1 이차부등식의 풀이 오류 고치기

오류 분석

경수가 한 풀이를 바르게 풀면 다음과 같다.

(1) $-x^2+4x-3>0$, $x^2-4x+3<0$

$(x-3)(x-1)<0$

$\therefore 1<x<3$

(2) $x^2-4>0$, $(x-2)(x+2)>0$

$\therefore x>2$ 또는 $x<-2$

2 삼각부등식의 증명

창의력 · 문제 해결력

삼각형에서 두 변의 길이의 합은 다른 한 변의 길이보다 크다.

(1) (좌변)^2

$=(|a|+|b|)^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|$

(우변)$^2=|a+b|^2$

(2) k의 범위에 따라 다음 값을 비교해 보자.

	$k<0$	$k=0$	$k>0$
$\lvert k\rvert^2$	$(-k)^2=k^2$	0	k^2
k^2	k^2	0	k^2

k의 범위에 상관없이 두 값이 일치하므로

$|k|^2=k^2$

(3) (ⅰ) $x\geq0$, $y\geq0$일 때,

$|xy|=xy$

$|x||y|=xy$

(ⅱ) $x\geq0$, $y<0$일 때,

$|xy|=-xy$

$|x||y|=x(-y)=-xy$

(ⅲ) $x<0$, $y\geq0$일 때,

$|xy|=-xy$

$|x||y|=(-x)y=-xy$

(ⅳ) $x<0$, $y<0$일 때,

$|xy|=xy$

$|x||y|=(-x)(-y)=xy$

따라서, 모든 경우에 $|xy|=|x||y|$가 성립한다.

(4) $(|a|+|b|)^2=|a|^2+|b|^2+2|a||b|$

$=a^2+b^2+2|ab|$

$|a+b|^2=(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

그런데 $|ab|\geq ab$ 이므로

$(|a|+|b|)^2\geq|a+b|^2$

(5) $(|a|+|b|)^2\geq|a+b|^2$이고, $|a|+|b|\geq0$, $|a+b|\geq0$이므로 $|a|+|b|\geq|a+b|$이다.



연습 문제 A

연습 문제 A

뿌리 **1** 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x-3|<4$　　(2) $|2x+1|\geqq 1$

(3) $2x^2-5x-3>0$　　(4) $8-x^2\leqq 2x$

> $|x|>2$를 만족하는 x의 범위는?

줄기 **2** x에 대한 이차부등식 $2x^2+ax+b<0$의 해가 $1<x<\frac{5}{2}$일 때, a, b의 값을 구하여라.

> 두 근을 1, $\frac{5}{2}$로 가지는 이차방정식은?

줄기 **3** 이차방정식 $2x^2+2kx+k^2+k-4=0$이 실근을 가지도록 실수 k의 값의 범위를 정하여라.

> 이차방정식 $ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$이 실근을 가지기 위한 판별식 D의 조건은?

줄기 **4** 부등식 $-x^2+kx+(k-3)<0$이 모든 실수에 대하여 성립하도록 k의 값을 정하여라.

> 모든 실수 x에 대하여 $x^2+bx+c>0$가 항상 성립할 조건은?

줄기 **5** 다음 연립이차부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 1<x+2<6 \\ x^2+2x-15\geqq 0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2-8x+15>0 \\ x^2-9x+14\leqq 0 \end{cases}$

> $1<x<5$이고 $2<x<7$인 부등식을 동시에 만족하는 x의 범위는?

열매 **6** 다음 부등식을 증명하여라.

(1) $(a+b)^2\geqq 4ab$

(2) $a>b>0$일 때, $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$

> $a>b>0$일 때, ab와 b^2 중에서 어느 것이 더 큰가?

162　Ⅳ. 방정식과 부등식

연습 문제 A

1 부등식의 풀이

(1) $|x-3|<4$, $-4<x-3<4$

$\therefore -1<x<7$

(2) $|2x+1|\geqq 1$

$2x+1\geqq 1$ 또는 $2x+1\leqq -1$

$\therefore x\geqq 0$ 또는 $x\leqq -1$

(3) $2x^2-5x-3>0$, $(2x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$

(4) $8-x^2\leqq 2x$

$x^2+2x-8\geqq 0$, $(x+4)(x-2)\geqq 0$

$\therefore x\leqq -4$ 또는 $x\geqq 2$

2 이차부등식의 작성

두 근이 1, $\frac{5}{2}$인 이차방정식은

$$(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)=0,\quad x^2-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}=0$$

$\therefore 2x^2-7x+5=0$

따라서, 이차부등식은

$2x^2-7x+5<0$　$\therefore a=-7$, $b=5$

3 실근을 가질 조건

$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2+k-4)\geqq 0$

$-k^2-2k+8\geqq 0$, $k^2+2k-8\leqq 0$

$(k+4)(k-2)\leqq 0$　$\therefore -4\leqq k\leqq 2$

4 판별식과 이차부등식

$D=k^2-4(-1)(k-3)<0$

$k^2+4k-12<0$, $(k+6)(k-2)<0$

$\therefore -6<k<2$

5 연립부등식의 풀이

(1) $\begin{cases} 1<x+2<6 & \cdots ① \\ x^2+2x-15\geqq 0 & \cdots ② \end{cases}$

(ⅰ) ①에서 $-1<x<4$　　③

(ⅱ) ②에서 $(x+5)(x-3)\geqq 0$

$x\leqq -5$ 또는 $x\geqq 3$　　④

③, ④로부터 $3\leqq x<4$

(2) $\begin{cases} x^2-8x+15>0 & \cdots ① \\ x^2-9x+14\leqq 0 & \cdots ② \end{cases}$

(ⅰ) ①에서 $(x-3)(x-5)>0$

$x<3$ 또는 $x>5$　　③

(ⅱ) ②에서 $(x-2)(x-7)\leqq 0$

$2\leqq x\leqq 7$　　④

③, ④로부터 $2\leqq x<3$ 또는 $5<x\leqq 7$

6 부등식의 증명

(1) $(a+b)^2-4ab=a^2+b^2+2ab-4ab$

$=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\geqq 0$

$\therefore\ (a+b)^2\geqq 4ab$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

(2) $(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$=(a-b)-(a-2\sqrt{ab}+b)$

$=2\sqrt{ab}-2b=2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})>0$

즉, $(\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$

$(\sqrt{a-b})^2>(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$\therefore\ \sqrt{a-b}>\sqrt{a}-\sqrt{b}$

연습 문제 B

1 절대값이 있는 일차부등식

(1) $|x|<9\quad \therefore\ -9<x<9$

(2) $|x+5|\geqq 2$, $x+5\geqq 2$ 또는 $x+5\leqq -2$

$\therefore\ x\geqq -3$ 또는 $x\leqq -7$

2 이차부등식의 풀이

(1) $x^2-4<0$, $(x+2)(x-2)<0$

$\therefore\ -2<x<2$

(2) $x^2-2x-3>0$, $(x-3)(x+1)>0$

$\therefore\ x<-1$ 또는 $x>3$

(3) $x^2+4x-12\geqq 0$, $(x+6)(x-2)\geqq 0$

$\therefore\ x\leqq -6$ 또는 $x\geqq 2$

(4) $x^2+8x+12\leqq 0$, $(x+2)(x+6)\leqq 0$

$\therefore\ -6\leqq x\leqq -2$

3 연립부등식의 풀이

(1) $\begin{cases} 4<x<7 & \cdots ① \\ x^2-11x+30\geqq 0 & \cdots ② \end{cases}$

②에서 $(x-5)(x-6)\geqq 0$

$\therefore\ x\leqq 5$ 또는 $x\geqq 6$ ③

연습 문제 B



1 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x|<9$　　(2) $|x+5|\geqq 2$

2 다음 이차부등식을 풀어라.

(1) $x^2-4<0$　　(2) $x^2-2x-3>0$

(3) $x^2+4x-12\geqq 0$　　(4) $x^2+8x+12\leqq 0$

3 다음 연립이차부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 4<x<7 \\ x^2-11x+30\geqq 0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2-1\leqq 0 \\ (x-1)^2-1<0 \end{cases}$



4 다음 부등식을 풀어라.

(1) $|x|+|x+4|\leqq 8$　　(2) $|x-1|+|x+3|>2$

5 다음 연립이차부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} 1<|x|<3 \\ x^2+3x-5\geqq 0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2-x-2>0 \\ (x-2)^2\leqq 2x+7 \end{cases}$

6 $a>0$, $b>0$ 일 때, 부등식 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq 4$을 증명하여라.

3. 부등식 163

①, ③으로부터 $4<x\leqq 5$ 또는 $6\leqq x<7$

(2) $\begin{cases} x^2-1\leqq 0 & \cdots ① \\ (x-1)^2-1<0 & \cdots ② \end{cases}$

①에서 $(x+1)(x-1)\leqq 0$

$\therefore\ -1\leqq x\leqq 1$ ③

②에서

$(x-1+1)(x-1-1)=x(x-2)<0$

$\therefore\ 0<x<2$ ④

③, ④로부터 $0<x\leqq 1$

4 절대값을 포함하는 부등식의 풀이

(1) (i) $x\leqq -4$ 일 때,

$|x|+|x+4|=-x-(x+4)$

$=-2x-4$



따라서, 주어진 부등식은

$-2x-4\leqq 8 \quad \therefore\ x\geqq -6$

이므로 주어진 조건에 맞는 구간은

$-6\leqq x\leqq -4$ ①

(ii) $-4<x\leqq 0$ 일 때,

$|x|+|x+4|=-x+(x+4)=4\leqq 8$

따라서, 이 범위에서 주어진 부등식은 항상 성립하므로 $-4<x\leqq 0$ ②

(iii) $x>0$ 일 때,

$|x|+|x+4|=x+x+4=2x+4$

따라서, 주어진 부등식은

$2x+4\leqq 8 \quad \therefore\ x\leqq 2$

따라서, 주어진 조건에 맞는 구간은

$0<x\leqq 2$ ③

①, ②, ③으로부터 주어진 부등식의 해는

$-6\leqq x\leqq 2$

(2) (i) $x\leqq -3$ 일 때,

$|x-1|+|x+3|=-(x-1)-(x+3)$
$=-2x-2$

따라서, 주어진 부등식은

$-2x-2>2 \quad \therefore\ x<-2$

조건에 맞는 구간은 $x\leqq -3$ ①

(ii) $-3<x\leqq 1$ 일 때,

$|x-1|+|x+3|=-(x-1)+(x+3)=4$

$4>2$ 이므로 조건에 맞는 구간은

$-3<x\leqq 1$ ②

(iii) $x>1$ 일 때,

$|x-1|+|x+3|=x-1+x+3$
$=2x+2$

따라서, 주어진 부등식은

$2x+2>2 \quad \therefore\ x>0$

따라서, 조건에 맞는 구간은 $x>1$ ③

①, ②, ③으로부터 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

5 연립부등식의 풀이

(1) $\begin{cases} 1<|x|<3 & ① \\ x^2+3x-5\geqq 0 & ② \end{cases}$

부등식 ①은 $\begin{cases} 1<|x| & ③ \\ |x|<3 & ④ \end{cases}$

③을 풀면, $x>1$ 또는 $x<-1$

④를 풀면, $-3<x<3$

그러므로 부등식 ①을 풀면

$-3<x<-1,\ 1<x<3$ ⑤

부등식 ②를 풀려면 방정식 $x^2+3x-5=0$의 해를 먼저 구해야 한다. 이 방정식의 해는

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$ 이므로 ②의 해는

$x\leqq\dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}$ 또는 $x\geqq\dfrac{-3+\sqrt{29}}{2}$ ⑥

⑤, ⑥으로부터 주어진 연립부등식의 해는

$\dfrac{-3+\sqrt{29}}{2}\leqq x<3$

(2) $\begin{cases} x^2-x-2>0 & ① \\ (x-2)^2\leqq 2x+7 & ② \end{cases}$

(i) $x^2-x-2=(x-2)(x+1)>0$

$x<-1$ 또는 $x>2$ ③

(ii) $(x-2)^2\leqq 2x+7$

$x^2-4x+4\leqq 2x+7,\ x^2-6x-3\leqq 0$

$\{x-(3+2\sqrt{3})\}\{x-(3-2\sqrt{3})\}\leqq 0$

$\therefore\ 3-2\sqrt{3}\leqq x\leqq 3+2\sqrt{3}$ ④

③, ④로부터 $2<x\leqq 3+2\sqrt{3}$

6 부등식의 증명

$a+b\geqq 2\sqrt{ab},\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqq 2\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}}$ 이므로

$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 2\sqrt{ab}\cdot 2\dfrac{1}{\sqrt{ab}}=4$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립)



종합 문제 A ▶ 21차시

교과서 164·165

다시 알아보기

이차방정식의 풀이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 근은 다음과 같다.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

판별식 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$에서 b^2-4ac를 **판별식**이라 하고, D로 나타낸다. 즉, $D=b^2-4ac$일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은
(1) $D=b^2-4ac>0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 가진다.
(2) $D=b^2-4ac=0 \Leftrightarrow$ 중근을 가진다.
(3) $D=b^2-4ac<0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 허근을 가진다.

근과 계수와의 관계 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$의 두 근을 α, β라 하면,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

절대값을 포함한 일차부등식
(1) $|x|>k \Leftrightarrow x<-k$ 또는 $x>k$
(2) $|x|<k \Leftrightarrow -k<x<k$

이차부등식 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a>0)$이 서로 다른 두 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$를 가지면
$ax^2+bx+c>0 \Rightarrow x<\alpha$ 또는 $x>\beta$
$ax^2+bx+c<0 \Rightarrow \alpha<x<\beta$

중요한 부등식
(1) $a^2+b^2\geq ab$
(2) $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$ (단, $a>0$, $b>0$)

종합 문제 A

1 다음 방정식을 풀어라.
(1) $-x^2+2x-5=0$
(2) $x^2-2x+1=5$
(3) $-2x^3+7x^2+x-6=0$
(4) $4x^4-3x^3-2x^2+3x-2=0$

2 이차방정식 $x^2+2(a-1)x+(4a-7)=0$이 다음과 같은 근을 가질 때, 실수 a의 값 또는 a의 값의 범위를 구하여라.
(1) 서로 다른 두 실근
(2) 서로 다른 두 허근
(3) 중근

3 다음 연립방정식을 풀어라.
(1) $\begin{cases}2x+y-z=2\\x+2y+4z=0\\2x+3y+z=4\end{cases}$
(2) $\begin{cases}2x^2+3xy=2\\2x^2+5xy-3y^2=0\end{cases}$

4 다음 부등식을 풀어라.
(1) $\begin{cases}x^2-16\leq0\\x^2+x-6>0\end{cases}$
(2) $\begin{cases}|x|\leq2\\x^2+2x-3<0\end{cases}$

5 x에 대한 이차부등식 $ax^2+4x+b>0$의 해가 $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$가 되도록 실수 a, b의 값을 구하여라.

6 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$을 증명하여라.
(단, a, b, x, y는 실수)

종합 문제 A

1 (1) 주어진 방정식의 양변에 -1을 곱하면

$x^2-2x+5=0 \quad \therefore x=1\pm2i$

(2) $x^2-2x-4=0 \quad \therefore x=1\pm\sqrt{5}$

(3) $-(x-1)(2x^2-5x-6)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{5\pm\sqrt{73}}{4}$

(4) $(x-1)(x+1)(4x^2-3x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\frac{3\pm\sqrt{23}\,i}{8}$

2 $\frac{D}{4}=(a-1)^2-(4a-7)$

$=a^2-6a+8=(a-2)(a-4)$

(1) $(a-2)(a-4)>0$

$\therefore a<2$ 또는 $a>4$

(2) $(a-2)(a-4)<0$

$\therefore 2<a<4$

(3) $(a-2)(a-4)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

3 (1) $\begin{cases}2x+y-z=2 & \cdots ①\\x+2y+4z=0 & \cdots ②\\2x+3y+z=4 & \cdots ③\end{cases}$

①×4+②에서 $9x+6y=8$ ④

①+③에서 $4x+4y=6$

$2x+2y=3$ ⑤

④, ⑤를 연립하여 풀면



$x=-\frac{1}{3},\ y=\frac{11}{6}$

이를 ①에 대입하면

$-\frac{2}{3}+\frac{11}{6}-z=2 \quad \therefore z=-\frac{5}{6}$

$\therefore x=-\frac{1}{3},\ y=\frac{11}{6},\ z=-\frac{5}{6}$

(2) $\begin{cases} 2x^2+3xy=2 & \cdots ① \\ 2x^2+5xy-3y^2=0 & \cdots ② \end{cases}$

②를 인수분해하면

$(2x-y)(x+3y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $x=-3y$

(i) $y=2x$일 때, 이것을 ①에 대입하여 정리하면 $8x^2=2 \quad \therefore x=\pm\frac{1}{2}$

따라서, $x=\frac{1}{2}$일 때 $y=1$

$x=-\frac{1}{2}$일 때 $y=-1$

(ii) $x=-3y$일 때, 이것을 ①에 대입하면

$9y^2=2 \quad \therefore y=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$

따라서, $y=\frac{\sqrt{2}}{3}$일 때 $x=-\sqrt{2}$

$y=-\frac{\sqrt{2}}{3}$일 때 $x=\sqrt{2}$

(i)과 (ii)로부터

$\therefore \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=1 \end{cases},\ \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases},\ \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases},\ \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

4 (1) $\begin{cases} x^2-16\leq 0 & \cdots ① \\ x^2+x-6>0 & \cdots ② \end{cases}$

①에서 $(x+4)(x-4)\leq 0$

$\therefore -4\leq x\leq 4 \quad \cdots ③$

②에서 $(x+3)(x-2)>0$

$\therefore x<-3$ 또는 $x>2 \quad \cdots ④$

③, ④로부터 $-4\leq x<-3$ 또는 $2<x\leq 4$

(2) $\begin{cases} |x|\leq 2 & \cdots ① \\ x^2+2x-3<0 & \cdots ② \end{cases}$

①에서 $-2\leq x\leq 2 \quad \cdots ③$

②에서 $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)<0$

$\therefore -3<x<1 \quad \cdots ④$

③, ④로부터 $-2\leq x<1$

5 $-\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$을 해로 가지는 이차부등식은

$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)<0,\ x^2-x-\frac{3}{4}<0$

$-4x^2+4x+3>0 \quad \therefore a=-4,\ b=3$

6 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2$

$=(ay-bx)^2\geq 0$

$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$

(단, 등호는 $ay=bx$일 때 성립한다.)

종합 문제 B

1 (1) $5x^2+3x-2=0,\ (5x-2)(x+1)=0$

$\therefore x=\frac{2}{5}$ 또는 $x=-1$

(2) $(x-4)(x^2+4x+16)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-2\pm2\sqrt{3}i$

(3) $\begin{cases} x+y-z=0 & \cdots ① \\ 2x-y+z=3 & \cdots ② \\ 5x+y-2z=-1 & \cdots ③ \end{cases}$

①+②에서 $3x=3 \quad \therefore x=1$

②+③에서 $7x-z=2$

$x=1$를 대입하면 $7-z=2$ $\therefore z=5$

$x=1,\ z=5$를 ①에 대입하면 $y=4$

$\therefore x=1,\ y=4,\ z=5$

(4) $\begin{cases} 2x+y=1 & \cdots ① \\ xy=-10 & \cdots ② \end{cases}$

①에서 $y=1-2x$ ③

③을 ②에 대입하여 정리하면

$x(1-2x)=-10,\ 2x^2-x-10=0$

$(2x-5)(x+2)=0$

$\therefore x=\frac{5}{2}$ 또는 $x=-2$

$\therefore \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$

2 $D=(-a)^2-4(a-1)=0,\ (a-2)^2=0$

$\therefore a=2$

3 $x^2-4x-5\leqq 0,\ (x-5)(x+1)\leqq 0$

$\therefore -1\leqq x\leqq 5$ ①

$2x^2-5x-3<0,\ (2x+1)(x-3)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<3$ ②

①, ②에서 $-\frac{1}{2}<x<3$

4 $A=\{x\,|\,x^2-6x+5<0\}$

$=\{x\,|\,(x-1)(x-5)<0\}=\{x\,|\,1<x<5\}$

$\therefore A^c=\{x\,|\,x\leqq 1$ 또는 $x\geqq 5\}$

한편, $A\cap B=\phi$이면 $B\subset A^c$이고

$B\subset(A\cup B)=\{x\,|\,-2\leqq x<5\}$이므로

$B=\{x\,|\,-2\leqq x\leqq 1\}=\{x\,|\,(x+2)(x-1)\leqq 0\}$

$=\{x\,|\,x^2+x-2\leqq 0\}$

$\therefore a=1,\ b=-2$

종합 문제 B



1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $5x^2+3x-2=0$ (2) $x^3-64=0$

(3) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=3 \\ 5x+y-2z=-1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ xy=-10 \end{cases}$

2 이차방정식 $x^2-ax+a-1=0$이 중근을 가지도록 a의 값을 정하여라.

3 연립부등식 $\begin{cases} x^2-4x-5\leqq 0 \\ 2x^2-5x-3<0 \end{cases}$을 풀어라.



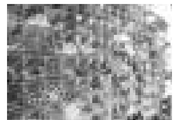


4 두 집합 $A=\{x\,|\,x^2-6x+5<0\}$, $B=\{x\,|\,x^2+ax+b\leqq 0\}$에 대하여

$A\cap B=\phi,\quad A\cup B=\{x\,|\,-2\leqq x<5\}$

를 동시에 만족하는 $a,\ b$의 값을 구하여라.

5 문구점에서 경수는 사인펜과 형광펜을, 미현이는 사인펜과 볼펜을, 희영이는 볼펜과 형광펜을 샀다.
경수는 물건값으로 1500원을 지불하였고, 미현이는 경수보다 200원을 더 냈으며, 희영이는 미현이보다 100원을 더 냈다. 사인펜, 형광펜, 볼펜의 값을 각각 구하여라.



166 Ⅳ. 방정식과 부등식

5 사인펜, 형광펜, 볼펜의 값을 각각 x원, y원, z원이라 하면,

$x+y=1500$ ①

$x+z=1700$ ②

$z+y=1800$ ③

①+②+③을 하면 $2(x+y+z)=5000$

$x+y+z=2500$ ④

④−①에서 $z=1000$,

④−②에서 $y=800$,

④−③에서 $x=700$

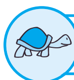
따라서, 사인펜 700원, 형광펜 800원, 볼펜 1000원이다.



함께 하는 수학

협력 학습 수행 과제

교과서 167쪽



방정식과 관련된 과학 원리

(1) 기체의 부피와 온도와의 관계

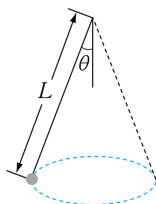
샤를의 법칙(Charles' law)은 '일정한 압력에서 일정량의 기체의 부피는 온도가 1°C 오를 때마다 0°C 때 부피의 $\frac{1}{273}$ 만큼씩 증가한다.' 이다. 즉, t°C 일 때의 기체의 부피를 V, 0°C일 때의 기체의 부피를 V_0라 하면

$$V=V_0\left(1+\frac{1}{273}t\right)$$

(2) 운동에너지 질량이 m인 물체가 속력 v로 움직이면 움직이는 방향과는 관계없이 운동에너지 K는 $K=\frac{1}{2}mv^2$

(3) 진자의 주기

원추진자란 오른쪽 그림과 같이 길이가 L인 줄에 매달린 추가 수평면 위에서 원을 그리며 움직이는 진자를 말한다. 원추진자의 주기 t는 이 추가 한 바퀴 도는데 걸리는 시간이다(단, g는 중력가속도이다).



$$t=2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}},\ 즉\ gt^2=4\pi^2L\cos\theta$$

(4) 비만도 판정

(표준 체중)=(키(cm)−100)×0.9(kg)

$$(비만도)=\frac{(실제\ 체중)-(표준\ 체중)}{(표준\ 체중)}\times100$$

비만도(%)	비만 분류
~ −10	체중 미달
−10~10	정상 체중
10~20	과체중
20~	비만

함께 하는 수학 | 협력 학습 수행 과제

1 키(cm)와 팔목 둘레(cm)의 비로 골격의 크기를 알아보는 분류에 의하면 성인 남자는 다음의 경우에 중간 크기에 속한다고 한다.

$$9.6\leqq\frac{(키)}{(팔목\ 둘레)}\leqq10.4$$

또, BMI(Body Mass Index)로 잘 알려진 체질량 지수는 몸무게(kg)와 키(m)의 제곱의 비로서 비만의 정도를 알아보는 것으로 다음의 경우에 이상적인 범위가 된다.

$$20\leqq\frac{(몸무게)}{(키)^2}\leqq25$$

$$즉,\ 20\times(키)^2\leqq(몸무게)\leqq25\times(키)^2$$

다음 물음에 답하여라.

(1) 팔목 둘레가 17cm인 성인 남자가 중간 크기의 골격을 가지도록 하는 키의 범위는 어떻게 되는가?

(2) 몸무게가 70kg인 성인 남자의 BMI가 이상적인 범위에 들어가도록 하는 키의 범위는 어떻게 되는가?

(3) 몸무게가 70kg이고 팔목 둘레가 17cm인 성인 남자가 중간 크기의 골격에 BMI도 이상적인 범위에 들어가도록 하는 키의 범위는 어떻게 되는가?

키와 팔목 둘레의 비로 골격의 크기를 알아보는 분류 기준은 휘트니(Whitney)와 해밀턴(Hamilton)이 제시한 것으로, 성인 여자의 중간 크기는 10.1 이상 11.0 이하이다.

2 인터넷이나 책을 참고하여 사회, 경제, 과학 등에 사용되는 방정식과 부등식에 관련된 것을 찾아서 문제를 만들고 풀어 보아라.

Ⅳ. 방정식과 부등식 167

● 부등식과 관련된 문제를 하나 더 풀어보자.

문제 어떤 기체의 부피를 0°C에서 측정하였더니 30L가 되었다. 이 기체를 운반하는데 부피의 변화가 1L 미만이 되도록 하려면 온도 조절을 어떻게 하여야 하는가?

풀이 $|V-V_0|=|V_0\times\frac{1}{273}t|$

이므로 $|30\times\frac{1}{273}t|<1$에서

$-9.1°<t<9.1°$

따라서, −9.1°C 이상 9.1°C 이하로 온도를 유지해야 한다.

실생활에서 방정식과 관련하여 풀 수 있는 문제들을 주의깊게 관찰함으로써 실생활에서의 문제를 해결할 수 있도록 지도한다.

성취 기준

- 실생활과 관련된 방정식이나 부등식을 찾을 수 있다.
- 이 단원에서 배운 형태의 방정식이나 부등식을 만들 수 있다.
- 방정식이나 부등식을 풀어서 실생활 문제를 해결할 수 있다.

모범 답안

1 (1) $9.6 \leq \frac{(\text{키})}{17} \leq 10.4$, $163.2\text{cm} \leq (\text{키}) \leq 176.8\text{cm}$

(2) $20 \times (\text{키})^2 \leq 70 \leq 25 \times (\text{키})^2$

(i) $20 \times (\text{키})^2 \leq 70$, $(\text{키})^2 \leq \frac{70}{20} = 3.5$

$\therefore (\text{키}) \leq \sqrt{3.5} \fallingdotseq 1.871(\text{m})$

(ii) $70 \leq 25 \times (\text{키})^2$, $(\text{키})^2 \geq \frac{70}{25} = 2.8$

$\therefore (\text{키}) \geq \sqrt{2.8} \fallingdotseq 1.673(\text{m})$

(i), (ii)에서 $1.673\text{m} \leq (\text{키}) \leq 1.871\text{m}$

(3) (1)과 (2)를 공통으로 만족하는 키의 범위는

$1.673\text{m} \leq (\text{키}) \leq 1.768\text{m}$

(또는 $167.3\text{cm} \leq (\text{키}) \leq 176.8\text{cm}$)

2 문제 길이가 30m와 40m 사이인 줄에 매달린 진자가 중심축에서 30°의 각을 이루면서 돌고 있을 때, 이 진자의 주기는 얼마인가?

풀이 $gt^2 = 4\pi^2 L\cos\theta$이므로 $4\pi^2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2} < 9.8t^2 < 4\pi^2 \cdot 40 \cdot \frac{1}{2}$이 되고, 이 부등식을 풀면 $7.8(\text{초}) < t < 9.0(\text{초})$

2 채점 기준

영역 / 요소	채점 요소	배점
문제 이해 및 해결 과정	실생활에서 방정식이나 부등식 찾아내기	3 점
	주어진 조건을 활용하여 방정식이나 부등식 만들기	5 점
	(연립)방정식이나 (연립)부등식의 해 구하기	2 점
총점		10점



단원 종합 평가

평가 기준 여러 가지 방정식의 해를 구할 수 있는지 평가한다.

1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^2-6x+1=0$

(2) $x^2-2x+3=0$

(3) $x^3+3x^2+5x+3=0$

(4) $x^4-5x^2-6=0$

평가 기준 이차방정식의 판별식의 뜻을 알고 있는지 평가한다.

2 이차방정식 $x^2+2(a+3)x+4(a+2)=0$이 중근을 가질 때, 다음 이차부등식을 풀어라.

$$3x^2-ax+(a-9)\geqq 0$$

평가 기준 연립방정식을 풀 수 있는지 평가한다.

3 다음 연립방정식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y+3z=2 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-xy+y^2=10 \end{cases}$

평가 기준 연립부등식을 풀 수 있는지 평가한다.

4 다음 부등식을 풀어라.

(1) $\begin{cases} x^2-2x-2>0 \\ x^2-3x-4\leqq 0 \end{cases}$

(2) $4x+5<x^2\leqq 5x+14$

평가 기준 이차방정식의 근과 계수의 관계를 알고 있는지 평가한다.

5 이차방정식 $3x^2-5x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\dfrac{\beta}{\alpha+1}$, $\dfrac{\alpha}{\beta+1}$를 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하여라.

평가 기준 주어진 부등식의 증명을 할 수 있는지 평가한다.

6 $a>b>0$인 실수 a, b에 대하여 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{a}{1+a}>\frac{b}{1+b}$$



1 (1) $x=3\pm2\sqrt{2}$

(2) $x=1\pm\sqrt{2}i$

(3) $(x+1)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore\ x=-1,\ -1\pm\sqrt{2}i$

(4) $x^4-5x^2-6=(x^2-6)(x^2+1)=0$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{6},\ \pm i$

2 $\dfrac{D}{4}=(a+3)^2-4(a+2)=a^2+2a+1=0$

$\therefore\ a=-1$ 2점

이 값을 주어진 부등식에 대입하면

$3x^2+x-10\geqq0$이다.

$(x+2)(3x-5)\geqq0$ 2점

$\therefore\ x\leqq-2$ 또는 $x\geqq\dfrac{5}{3}$ 1점

3 (1) $\begin{cases} x+y+z=3 & \text{①} \\ 2x+y+3z=2 & \text{②} \\ x+2y+2z=3 & \text{③} \end{cases}$

①×2−③을 하면 $x=3$ 2점

$x=3$ 을 ②, ③에 각각 대입하면

$\begin{cases} y+3z=-4 \\ 2y+2z=0 \end{cases}$ 2점

이 연립방정식을 풀면

$y=2,\ z=-2$ 1점

(2) $\begin{cases} x+y=1 & \text{①} \\ x^2-xy+y^2=10 & \text{②} \end{cases}$

①에서 $y=1-x$를 ②에 대입하여 정리하면 2점

$x^2-x-3=0\quad\therefore\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ 2점

$\therefore\ x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$일 때, $y=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$

$x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$일 때, $y=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ 1점

4 (1) (i) $x^2-2x-2>0$을 풀면

$x<1-\sqrt{3}$ 또는 $x>1+\sqrt{3}$ 2점

(ii) $x^2-3x-4\leqq0$을 풀면

$-1\leqq x\leqq4$ 2점

(i), (ii)에서 $-1\leqq x<1-\sqrt{3}$ 또는

$1+\sqrt{3}<x\leqq4$ 1점

(2) $x^2-4x-5>0$과 $x^2-5x-14\leqq0$을 풀면

$x<-1$ 또는 $x>5$, $-2\leqq x\leqq7$이므로

$-2\leqq x<-1$ 또는 $5<x\leqq7$

$\alpha+\beta=\dfrac{5}{3},\ \alpha\beta=\dfrac{1}{3}$이므로 ①

5 $\dfrac{\beta}{\alpha+1}+\dfrac{\alpha}{\beta+1}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$

$=\dfrac{34}{27}$

$\dfrac{\beta}{\alpha+1}\cdot\dfrac{\alpha}{\beta+1}=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\dfrac{1}{9}$ ②

따라서, 구하는 방정식은

$x^2-\dfrac{34}{27}x+\dfrac{1}{9}=0$ ③

영역 \ 요소	채점 요소	배점
문제 이해 및 해결 과정	근과 계수의 관계를 이용하기 ①	2 점
	주어진 두 근의 합과 곱 구하기 ②	2 점
	이차방정식으로 표현 ③	1 점
총점		5점

6 $\dfrac{a}{1+a}-\dfrac{b}{1+b}=\dfrac{a-b}{1+a+b+ab}$

그런데 $a>b>0$이므로 $ab>0,\ a+b>0,$

$a-b>0$이다. 따라서, $\dfrac{a}{1+a}-\dfrac{b}{1+b}>0$, 즉

$\dfrac{a}{1+a}>\dfrac{b}{1+b}$

보충 학습

1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $x^2-3x+4=0$

(2) $x^3-4x^2+5x-2=0$

(3) $\begin{cases} x+y=7 \\ y+z=3 \\ z+x=2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

2 이차방정식 $x^2-(k+1)x-k=0$이 실근을 가지는 k의 범위를 구하여라.

3 연립부등식 $\begin{cases} x^2-6x+8\leqq 0 \\ x^2-4x+3>0 \end{cases}$ 을 풀어라.

심화 학습

4 $x^2+x+1=0$을 만족하는 x 에 대하여 다음 식의 값을 구하여라.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\qquad+\left(x^{10}+\frac{1}{x^{10}}\right)$$

5 두 개의 이차방정식 $x^2+kx+1=0$과 $2x^2-(k+1)x+(k+1)=0$ 의 근을 구했을 때, 두 개의 실근과 두 개의 허근을 가질 수 있도록 k의 범위를 구하여라.

보충 학습

1

(1) $x=\frac{3\pm\sqrt{7}i}{2}$

(2) x^3-4x^2+5x-2

$=(x-1)(x^2-3x+2)$

$=(x-1)(x-2)(x-1)$

$=0$

$\therefore x=1$(중근), 2

(3) 세 식을 모두 더하면

$2x+2y+2z=12$

$x+y+z=6$

$\therefore x=3,\ y=4,\ z=-1$

(4) $y=2-x$를 두번 째 식에 대입하면

$x^2+(2-x)^2=10$

$x^2+x^2-4x+4=10$

$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1, 3$

따라서, $x=-1$일 때 $y=3$

$x=3$일 때 $y=-1$

$\therefore \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

2

$D=(k+1)^2+4k=k^2+6k+1\geqq 0$

$k^2+6k+1=0$의 근은 $k=-3\pm2\sqrt{2}$

$\therefore k\leqq-3-2\sqrt{2}$ 또는 $k\geqq-3+2\sqrt{2}$

3

(i) $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)\leqq 0$

$\therefore 2\leqq x\leqq 4$

(ii) $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>3$

(i)과 (ii)에서 $3<x\leqq 4$

심화 학습

4

$x^2+x+1=0$이므로

$x^3+x^2+x=0$ 즉, $x^3=-x^2-x=1$

$x^4=x^3\cdot x=x$

$x^5=x^3\cdot x^2=x^2$

$x^6=(x^3)^2=1$

$\vdots$

이다. 한편, $x^2+x+1=0$에서 $x\neq 0$이므로 양변을 x로 나누면

$x+1+\frac{1}{x}=0$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-1$

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=-1$

$x^3+\frac{1}{x^3}=1+1=2$

$x^4+\frac{1}{x^4}=x^3\cdot x+\frac{1}{x^3\cdot x}=x+\frac{1}{x}=-1$

$\vdots$

따라서,

(준식)$=(-1)+(-1)+2+(-1)+(-1)+2$

$+(-1)+(-1)+2+(-1)$

$=-1$

5

(i) 앞의 방정식이 두 개의 실근을 가지고, 뒤의 방정식이 두 개의 허근을 가질 때

$\begin{cases} k^2-4\geqq 0 \\ (k+1)^2-8(k+1)<0 \end{cases}$

이 연립부등식을 풀면

$2\leqq k<7$

(ii) 앞의 방정식이 두 개의 허근을 가지고, 뒤의 방정식이 두 개의 실근을 가질 때

$\begin{cases} k^2-4<0 \\ (k+1)^2-8(k+1)\geqq 0 \end{cases}$

이 연립부등식을 풀면

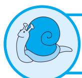
$-2<x\leqq-1$

(i)과 (ii)에서

$-2<x\leqq-1$ 또는 $2\leqq x<7$



교과 교육 연구 자료

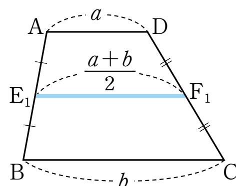


여러 가지 평균의 기하학적 의미

$a>0$, $b>0$인 두 수의 산술평균, 기하평균, 조화평균은 평행인 두 변의 길이가 각각 a, b인 사다리꼴에서 그 크기를 비교할 수 있다. 즉, $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$이고 $\overline{AD}=a$, $\overline{BC}=b$인 사다리꼴 ABCD에 대하여

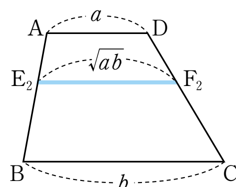
(1) 산술평균 : $\overline{AB}$, $\overline{CD}$의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하면

$\overline{E_1F_1}=\dfrac{a+b}{2}$이다.



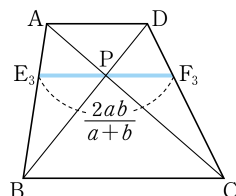
(2) 기하평균 : $\square AE_2F_2D \backsim \square E_2BCF_2$가 되도록 $\overline{AD}$에 평행인 선분 $\overline{E_2F_2}$를 그리면 $\overline{E_2F_2}=\sqrt{ab}$이다.

$\left(\begin{array}{l} \because\ \overline{AD} : \overline{E_2F_2}=\overline{E_2F_2} : \overline{BC} \\ \quad \therefore\ (\overline{E_2F_2})^2=\overline{AD}\cdot\overline{BC}=ab \end{array}\right)$



(3) 조화평균 : 두 대각선의 교점 P를 지나고, $\overline{AD}$에 평행인 선이 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$와 만나는 점을 각각 E_3, F_3라 하면

$\overline{E_3F_3}=\dfrac{2ab}{a+b}$이다.

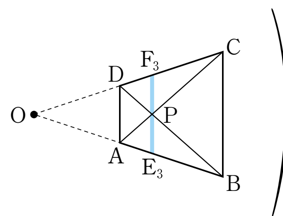


$\because$ AB, CD의 교점을 O라 하면

APD $\backsim$ △CPB에서 $\overline{BE_3}=\dfrac{b}{a}\overline{E_3A}$

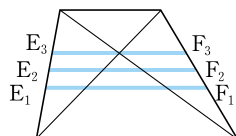
△DOA $\backsim$ △COB에서 $\overline{OA}=\dfrac{a+b}{b-a}\overline{E_3A}$

△OAD $\backsim$ △OE_3F_3에서 $\overline{E_3F_3}=\dfrac{2ab}{a+b}$



(4) 위의 $\overline{E_1F_1}$, $\overline{E_2F_2}$, $\overline{E_3F_3}$를 같은 사다리꼴에 그리면 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore\ \overline{E_1F_1} \geqq \overline{E_2F_2} \geqq \overline{E_3F_3}$



참고 • http://210.90.19.1